عمومي رياضي

د اعدادو او مختصاتو سيستم، مستقيم خطونه او دايره، عددي ترادفونه، تابع او ګراف، پولينومي او ناطق توابع، نمائي او لوګارتمي توابع، مثلثاتي او معکوس مثلثاتي توابع، هايپربوليک او معکوس هايپربوليک توابع، ضمني او پارامتريک توابع، د توابعو ليمت، د توابعو مشتقونه، انتګرالونه، تحليلي هندسه او تطبيقي مسائل.

مؤلف: دوکتور محمدانور غوري

ژباړه: نور احمد شاهين

کال - 1401

مولف:
دکتور محمد انور غوري
ژباړن:
نور احمد شاهین
علمي ایډیټران:
محمد خان حیدري، پوهاند عبدالحق ایمل، نرګس بیګ
ژبني ایډیټران:
محمد افضل ذاکر، امان الله ایمان، محمد نعمان موحد
علمي بورډ غړي:
پوهاند دوکتور محمد قاسم جمدر، پشتون ګل وردګ رسولي، دوکتور محمد انورغوري
نرګس حلیم، پوهاند دوکتور محمد عارف تنیوال، فتانه لامع، بلقیس حلیمي
رابط کسان:
آمنه رمیار، عطا محمد میاخیل، استاد لطیفه، دیانا مجددی
کمپوز او ډیزاین:
انجنیر محمد افضل ذاکر
خپرندوی:
سعید خپرنیز مرکز
چاپ ځای:
سعید چاپخانه
شمیر:
100 ټوکه
د چاپ وار:
دویم، 1401 هـ.ش
قیمت: 350 افغانی
د چاپ ټول حقوق له خپرنیز مرکز سره خوندي دي

انتشارات سعید آدرس: ابتدای جاده‌ی آسمایی، کابل.
شماره‌های تماس:
0705814642 و 0730200700
0707575935 و 0788100157
Shirahmad_saedy@yahoo.com
dabeer.saedy@gmail.com


بسم الله الرحمن الرحيم

ډالۍ!

خپل قدرمن پلار نباغلي انجنير صاحب غلام نقيب رسولي ته!

- درنې مور آغلې انجنير پشتون ګل وردګ رسولي ته!
- د طبيعي علومو ستر عالم البيرت اينشټاين ته!
- درونده استاد نباغلي دوکتور محمد انور غوري ته!
- دنادرې عالي لپسې او رعد کورس ټولو درنو استادانو او ګرانو ټولګيوالو او زده کوونکو ته!

د سر خبرې

زمونږ د ګران هیواد په اوسنیو شرایطو کې د ریاضي مسلکي ښوونکو قلت، د درسي پروګرامونو نه همغږي، د کتابونو د خپراوي محدویت او نور عوامل دي، چې په معارف او لوړو زده کړو برخه کې یې د ریاضیاتو تدریس ستونزمن کړی دی. ډیری زده کونکي چې لوړو زده کړو ته داخلیږي د ریاضي زده کړې پرمهال ډېرې ستونزې ورته ولاړیږي، پدې اساس اړینه ده چې د لوړو زده کړو مؤسسو د لومړي کال ریاضي داسې تدوین شي چې د ښوونځي دورې د معلوماتو متمم وي او په عین وخت کې د راتلونکو اړتیا لپاره یې هم ځوابګو واوسي. د همدې اړتیا او مصلحت په اساس د طبیعي علومو د لومړي کال زده کوونکو ته مو د عمومي ریاضي کتاب په پام کې ونیو او بشپړ شو. د کتاب محتویات د عمومي ریاضي کلي او لومړني مفاهیم دي. د کتاب په هره برخه کې هڅه شوې څو مباحث په ساده، عام فهم او لنډ ډول توضیح شي. د امکان تر بریده د تفننې تفصیلاتو او نظري مسایلو له توضیحاتو څخه ډډه شوې او یوازې د تطبیقي مسائلو په شهودي او تحلیلي توضیحاتو اکتفا شوې.

دغه کتاب سربیره پر دې چې د ساینس پوهنځی لومړي کال کې تدریس کیږي د انجنیرۍ، پولی تخنیک، زراعت، وترنري، ځمکپوهنې، اقتصاد، فارمسي، طب، ښوونې او روزنې، د تربیې معلم مؤسسې او نورو لپآره هم ګټور دی. نه وایم چې کتاب له هره اړخه کامل او پرته له نواقصو دی. د دې علم علاقمندانو اصلاحي وړاندیزو او نظر په ورین تندي منل کیږي، د لایق او تکړه ځوان ښاغلي نور احمد شاهین نه ډېر مننه ویه یم چې دا کتاب په مکمل توګه، د پښتو په خوږو عباراتو ترجمه کړ.

مـ. انورغـوری

ليکلړ

سرليك مخکښه

لومړی څپرکی
سيټونه او د اعدادو سيستم

1.1 د سيټ پېژندنه.....1
1.2 د سيټونو الجبري عمليې.....3
1.3 د حقيقي اعدادو سيستم.....6
1.4 په حقيقي اعدادو کې ترتيب.....10
1.5 مختلط اعداد.....13
1.6 د څپرکي لنډيز.....16
1.7 تمرين.....17

دويم څپرکی
د مختصاتو سيستمونه، مستقيم خط او دايره

2.1 د قايم مختصاتو سيستم پېژندنه.....19
2.2 مستقيم خط.....21
2.3 دايره.....26
2.4 قطبي مختصات.....30
2.5 د مختلط اعدادو قطبي ښودنه.....33
2.6 د څپرکي لنډيز.....39
2.7 تمرين.....41

دريم څپرکی
متريکس او ديترمينانت

3.1 د متريکس لومړني مفاهيم.....43
3.2 د متريکسونو الجبري عمليې.....45
3.3 ديترمينانت.....46
3.4 د متريکس او ديترمينانت کارونې.....49
3.5 د څپرکي لنډيز.....54
3.6 تمرين.....56

څلورم څپرکی
د اعدادو ترادف او تصاعد

4.1 د ترادف مفهوم.....59
4.2 حسابي ترادف (حسابي تصاعد).....60
4.3 هندسي ترادف (هندسي تصاعد).....64
4.4 هارمونیک ترادف.....67
4.5 د ریاضي استقراء.....69
4.6 ترکیبي آنالیز.....71
4.7 د بینوم فورمول.....73
4.8 د څپرکي لنډیز.....77
4.9 تمرین.....79

پنځم څپرکی
تابع او ګراف

5.1 د تابع پېژندل.....83
5.2 د توابعو عمومي ځانګړتیاوې.....86
5.3 ځینې اساسي توابع.....90
5.4 د توابعو ترکیب (د تابع، تابع).....94
5.6 د څپرکي لنډیز.....97
5.7 تمرین.....98

شپږم څپرکی
پولینومونه او ناطق توابع

6.1 د پولینوم لومړني مفاهیم.....101
6.2 د عامل او باقیمانده قضیې.....104
6.3 دویم درجه پولینومونه.....106
6.4 د دویم درجه پولینوم صفري نقطې.....109
6.5 د دویم درجه پولینوم اعظمي او اصغري نقطې.....111
6.6 د پولینوم جذرونو عمومي ځانګړنې او ډولونه.....113
6.7 ناطق توابع.....117
6.8 د څپرکي لنډیز.....121
6.9 تمرین.....123

اووم څپرکی
نمائي او لوګارتمي توابع

7.1 د اعدادو توانونه.....127
7.2 نمائي توابع.....130
7.3 لوګارتم او لوګارتمي توابع.....132
7.4 اعشاري لوګارتم(معمولي لوګارتم).....134
7.5 هايپربوليک توابع.....138
7.6 د هايپربوليک توابعو معکوس.....142
7.7 د څپرکي لنډيز.....143
7.8 تمرين.....145

اتم څپرکی
مثلثاتي توابع

8.1 د زاويې او اندازه نيونې مفاهيم يې.....147
8.2 مثلثاتي نسبتونه.....151
8.3 د زاويو د مجموع او تفاضل قوانين.....158
8.4 د مثلثاتي نسبتونو د ضرب قوانين.....162
8.5 د مثلث د زاويو مثلثاتي نسبتونو قوانين.....162
8.6 د مثلثاتي توابعو پېژندل.....164
8.7 معکوس مثلثاتي توابع.....167
8.9 د څپرکي لنډيز.....172
8.10 تمرين.....174

نهم څپرکی
د توابعو ليمت او تمادیت

9.1 د ليمت معرفي.....177
9.2 د ليمت ځانګړتياوې.....182
9.3 د ليمت مبهم حالتونه.....187
9.4 د مثلثاتي توابعو ليمت.....190
9.5 د نمائي او لوګارتمي توابعو ليمت.....192
9.6 د توابعو تمادیت(ترڅ والی).....196

9.7 د څپرکي لنډيز.....200
9.8 تمرين.....202

لسم څپرکی
د توابعو مشتقونه

10.1 د مشتق نيونې لومړني اصول.....205
10.2 د مثلثاتي توابعو مشتق.....210
10.3 د نمائي او لوګارتمي توابعو مشتق.....212
10.4 د مرکب توابعو مشتق نيونه.....213
10.5 د هايپربوليک او معکوس توابعو مشتق نيونه.....219
10.6متوالي مشتقونه.....221
10.7 تزايد او ديفرنسيل(تفاضلي).....222
10.8 د څپرکي لنډيز.....224
10.9 تمرين.....226

يوولسم څپرکی
د مشتق کارونې

11.1 د تابع ګراف په رسمولو کې د لومړي مشتق کارونې.....229
11.2 د مشتق تطبيقي قضيې.....235
11.3 دويم مشتق او د ګراف انحنا.....237
11.4 مطلق اعظمي او اصغري قيمتونه.....240
11.5 تطبيقي مسائل.....242
11.6 د توابعو د ګراف مجانبونه.....245
11.7 د ليمت په شمېرنو کې د مشتق کارونې (د هوپيتال قاعده).....250
11.8 د څپرکي لنډيز.....255
11.9 تمرين.....258

دوولسم څپرکی
انتګرال

12.1 د غيرمعين انتګرال عمومي مفاهيم.....261
12.2 د اساسي انتګرالونو جدول.....263
12.3 په تعويضي طريقه انتګرال نيونه.....265

12.4 مثلثاتي تعويضونه.....269
12.5 دويم درجه پولينوم لرونکي انتګرالونه.....272
12.6 په انقسام طريقه انتګرال نيونه.....273
12.7 مثلثاتي انتګرالونه.....277
12.8 د ناطق توابعو انتګرال نيونه.....279
12.9 معين انتګرال.....281
12.10 د معين انتګرال کارونې.....285
12.11 د څېرکي لنډيز.....296
12.12 تمرين.....299

ديارلسم څېرکی
مخروطي مقاطع

13.1 د مخروطي مقاطع پېژندنه.....301
13.2 پا رابولا 303
13.3 بيضوي.....310
13.4 هايپربولا.....318
13.5 د مخروطي مقاطع تشخيص.....326
13.6 په قطبي مختصاتو کې د مخروطي مقاطع معادلې.....328
13.7 د څېرکي لنډيز.....334
13.8 تمرين.....336

ضميمه

لومړی د هندسي شمېرنو قواعد.....339
دويم د مثلثاتي نسبتونو تاريخچه.....345
اخځليکونه.....347

د زرغون پيغام

يووشتمه پېړۍ د اړيکو پېړۍ ده، په دغې پېړۍ کې هغه هېواد ډېر وروسته پاتې وي چې له نړيوالې ټولنې سره بې اړيکو وي. د نورو برخو په شان د هيوادونو علمي اړيکو ساتل هم خورا اړين دي، د علمي اړيکو يوه لار دا ده چې هيوادونه د يوه بل د علمي اتباعو آثار وڅېړي او په دې کار سره د علمي اړيکو په حواله د هيوادونو ترمنځ ټولې پولې ورانې کړي.

تاريخ موږ ته وايي چې د علومو ډېري مفاهيم په آسيا کې ايجاد او د عربي ممالکو له لارې غربي هيوادونو ته د ژباړو په مرسته لېږدول شوي دي او په دې توګه د ژباړې په ذريعه علوم له يوې قارې و بلې او له يوه هيواد و بل ته رسيدلي دي. د ساري په توګه د رياضي ننۍ اعدادو سيستم هندي-عربي چې موږ او تاسې يې کاروو په هند کې منځته راغلي د اعرابو په ذريعه غرب ته لېږدول شوي، هورې مفاهيم او کارونې يې ژباړل شوي او عمومي(نړيوال) رنګ يې غوره کړی.

د ژباړې اهميت دومره دی چې په يوه دوه پاراګراف کې بحث پرې کول شايد ناممکن وي. په علمي برخه کې د افغان محصلينو شديد اړتياوو او د علمي کتابونو او وثيقو نيمګړتياوو موږ دې ته اړ ايستو څو له دې لارې افغاني علمي ټولنې ته يو څه وړاندې کړو. په دې توګه مو په ۱۳۹۲ کال کې د ښاغلي احمد فهيم سپين غر په مشرۍ دغه مرکز ايجاد کړ، موږ خپل کاري لومړيتوبونه په دې توګه وټاکل چې لومړی به د افغانستان د ټولو پوهنځيو ټول درسي کتابونو دوو ملي ژبو ته ژباړو، په دويم ګام کې به ټول ممد درسي کتابونه چې محصل ته د زده کړې پرمهال ډېره اوږه ورکوي ژباړو، له دې دوو وروسته دريم ګام کې چې کله درسي کتابونه او ممد درسي کتابونو د محصل په اختيار کې واقع شول او علمي چانټې يې ډکې شوې، نو د همدې محصلينو په ذريعه تحقيقي کارونه کول څو هر څوک په خپله برخه کې څېړنيزې پايله ترلاسه کړی شي چې خوشبختانه تر نن ورځې پورې وتوانيدلو د کابل پوهنتون ساينس پوهنځي درسي کتابونه له يوې ملي ژبې ځخه بلې ملي ژبې ته وژباړو او دا لړۍ به تر هغه دوام لري څو د افغانستان د ټولو پوهنځيو ټول درسي او ټول نړيوال ممد درسي کتابونه په دواړو ملي ژبو ولرو.

موږ په کاري پلان کې د زرغون په نامه د يوې علمي مجلې خپرل هم ول، خو د اقتصادي او بودیجوي امکاناتو د ذيق والي له کبله په دې کار ونه توانيدلو، اما د دې وعدې د پوره کېدو او د دې تشې د ډکيدو لپاره مو د (Zarghoon Green) په نامه يوه فيسبوک پاڼه جوړه کړه چې محض علمي مسايل خپروي او په الکترونکي توګه يې تر خلکو رسوي.

له خپلو دغه هڅو مو طمع دا ده چې په علمي لحاظ د هيوادونو سره زمونږ دغه فصل يوه ورځ په وصل واوړي او زمونږ محصل د نړۍ يا حتی د سيمې له محصل سره علمي تقابل وکولی شي. زمونږ دا هڅې زمونږ د امکاناتو په تناسب خورا عالي دي، خو د دې سترې علمي اړتيا په پرتله بيا په نشت حساب دي، نو مونږ او تاسې ته پکار ده چې هر څوک متې را ونغاړي او د دې مرکز سره په معنوي برخه(ژباړو ، کمپوز او ډيزاين) کې همکاري وکړي څو لا اقل د هيواد وچ علمي ډاګونه خړوب او د وطن علمي کادر تنده ماته کړی شو.

د باسواده افغانستان په هيله

انجنير مطيع الله هوتک

د زرغون ټيړنې او ژباړې مرکز عمومي رئيس او د علمي بورډ مشر

وګړي واړه کارونه خپل کا مردان هغه دي چې کار دبل کا

په هغه تولنو کې چې وګړي يې نه يوازې له حکومتي بلکې له شخصي امکاناتو څخه په ګه لخيستې سره خپل هيواد، ولس اوخلکو ته دخپل مسلک له لارې، څه کول غواړي، دغه تولنې خپل راتلونکی په خپل لاس جوړوي. د ډيرو داسې خوانانو دحال شاهد يو چې له پوهنتونه فارغ اما اوزګار ګرځي او پرې په حکومتي چارواکو لچوي، زما باور دا دی که چېرې يو څوک دکار او يو څه کولو ارمان ولري، نو مخکې له دې چې دحکومت کاري دروازې يې پرمخ خلاصې شي ده خان وختې په يوه کار بوخت ساتلی وي او عملا خپلو خلکو ته يو څه عرضه کوي.

بناغلی مطيع الله هوتک يو له پاس ياد شوو کسانو څخه دی چې دکابل پوهنتون د ساينس پوهنځی له ډيک ډيپارټمنټ څخه فارغ شوی، اوس د سوداګرۍ وزارت سره د نشراتي همکارۍ سربيره د زرغون ټيپرټي او ژباړې مرکز مشري هم کوي، د ده په مشرۍ د زرغون مرکز هڅې دپرې حياتي او د ستايلو دي. زرغون دټيپرټي او ژباړې مرکز د ساينس برخې لس ګونه عنوانه درسي کتابونه ژبارلي او هغه محصلين چې ژبنې ستونزې لري عملا استفاده تري کوي د دې ترڅنګ د ساينسي برخې ډيرو کتابونو کمپوز، ډيزاين اوحتی ايډيټ کې له درنو استادانو سره همکاري کوي. خای يې دی چې ووايم کابل پوهنتون کې يو څه موده داسې حلقات را پيدا شول چې په درسي ملحول کې ژبنی اندول يې شعار و، دغه حلقات که څه هم شعار يې سم و، اما شعار يې د ارمان دځرګندونې پرځای د شومو اهدافو ځرګندوی و او پرته له دې چې قومي وانتونه يې اکاډميکو ساحو ته راوستل بله لاسته راورنه يې نه درلوده، خو له نيکه مرغه زرغون په خپلو ريښتيني او ايماني هڅو يادحرکتونه خنثی او پوچ ثابت کړل.

زما غوښتنه د زرغون له رهبري هيئت څخه دا ده چې له کابل پوهنتون سره دې په علمي برخه کې خپلې هڅې جاري وساتي او د اکاډميکو ارګانونو دلا ښه توب لپاره له دولت سره همکار واوسي.

په پای کې کابل پوهنتون علمي معاونيت بناغلی مطيع الله هوتک ته د افغانستان د ساينس برخې د اتل او د هيواد ريښتوني بچي لقب ورکوي.

آباد دې وي افغانستان اوتل دې وي د هيواد ريښتوني بچيان

کابل پوهنتون

زه پرې ویاړم!

پوهان وایي، پوهنه هغه رنا ده چې په ذریعه یې کېدای شي انسان خپل ځان، خدای او نړۍ په واقعي توګه وپېژني د پوهې په ترلاسه کولو سره انسان کولی شي د خدای خلافت درجې ته ورسیږي، نو د هر انسان لپاره اړینه ده چې د لازمې پوهې په ترلاسه کولو سره ځان، نړۍ او خدای وپېژني. د پوهې ترلاسه کولو په منظور د مفاهیمو او مضامینو د نسخو موجودیت یا په بله ژبه د درسي کتابونو شتون دغه پروسه ښېره او ګټوره کولی شي ځکه درسي مواد په تدریسي برنامو کې د مثلث یو راس ګڼل کیږي او نه موجودیت یې دغه پروسه تر پوښتنو لاندې راوستلی شي.

ادعا کوم چې د کابل پوهنتون ساینس پوهنځی له دې اړخه خپلې ستونزې تر ډېرې هواري کړي. د دې ترڅنګ چې درانه استادان درسي کتابونه برابروي، زرغون د ځېرنې او ژباړې ملي مرکز چې د ۱۳۹۱ کال د فارغینو په ځواب جوړ شوی، دغه کتابونه په موازي توګه له یوې ملي ژبې ځخه بلې ملي ژبې ته اړوي او په دې توګه د محصلینو ستونزو ته د کتاب په حواله د پای ټکی ږدي. دغه ملي مرکز چې دمې ګړۍ یې انتخابي او دوره ای مشر ښاغلی انجنیر مطیع الله هوتک دی،د دې پوهنځي اکثر درسي کتابونه وژباړل او په پام کې لري چې د نوروز پوهنځیو درسي او مهم درسي کتابونه هم ملي ژبو ته واړوي. او په دې توګه دغه مرکز دا شعار چې ویل کېدل به((په تعلیمي او تحصیلي برخو کې د ژبو انډول غواړو!)) په عمل کې پیاده او په خپلو ځواو یې هغه یې اساسه او محض شعاري حرکتونه چې په دې حواله یې د قومونو ترمنځ درزونه ایجادول، محوه او منشئت کړل.

زه د ساینس پوهنځي استاد او رئیس په توګه د دې مرکز په هر ګړي ویاړم او ځځې یې ستایم ځکه دوی په دې کار سره هم خپل اسلامي او اخلاقي مسولیت په ښه توګه ترسره کوي او هم د محصلینو جدي ستونزې چې د کتاب او درسي موادو په اړه دي هواري کوي. دوی ته د ژوند په ټولو برخو په ټېره علمي او تعلیمي برخه کې د موفقیت او کامیابۍ استدعا کوم. سپارښتنه مې درته لوستونکو ته دا ده چې د کتابونو په لوست سره پوهه ترلاسه او ځان د انسانیت لوړو مدارجو ته ورسوئ.



سريزه

عمومي رياضي د اعدادو سيستم، تحليلي هندسې مقدمات، توابع، ليمت، مشتقونه، انتګرال، تطبيقي مسايل او دې ته ورته مباحث په بر کې لري. چې د الجبري او تحليلي هندسې ميتودونو په ذريعه څېړل کيږي. پاسيني مباحث معمولا په دوو طريقو مطرح کيږي. لومړۍ طريقه د ليدلو او قياسي ميتودونو په کارولو او ساده مثالو په بيانولو سره د موضوعاتو طرح کول او شننه را په ګوتو کوي، هغه کتابونه چې په دې توګه تدوين کيږي د ((مشتق نيونې او انتګرال نيونې شمېرنې)) په نامه يادېږي چې سمبوليک نوم يې ((کلکولس)) دی. دويمه طريقه کې موضوعات په دقيق او منطقي توګه تحليل کيږي چې هر اړخيز او مفصل دقت پکې پام کې نيول کيږي، په دويمه طريقه مرتب شوي کتاب ته ((د رياضي آنالیز)) وايي. د دې دوو طريقو د تفکيک او توپير لپاره مطلق معيار نشته، دغه دوه عنوانونه له يوه بل سره ورته دی او عين موضوعات لري. عمومي رياضي کتاب د لومړۍ طريقې په ذريعه تدوين شوی. په لومړي ګام کې د حقيقي اعدادو سيټ تصنيف او مطرح شوی چې په دې توګه مختلط اعداد هم معرفي کيږي، وروسته متحولين او اړونده اړيکې يې د حقيقي اعدادو د عناصرو په توګه، قايم او قطبي مختصاتو سيستم پېژندل شوي، مستقيم خطونه، دايره، مختلط اعداد او مخروطي مقاطع د ګرافيک د اساساتو په توګه مطالعه کيږي. عددي ترادفونه، د توابعو ځانګړنې، پولينومي او ناطق توابع، نمايي او لوګارتمي توابع، مثلثاتي او معکوس مثلثاتي توابع، هايپربوليک او معکوس هايپربوليک توابع هغه اړين مفاهيم دي چې په پوره تفصيل مطرح شوي. اساسي مباحث د توابعو ليمت، د هرډول توابعو مشتقونه، معين انتګرالونه او داسې نور دي، د ټولو موضوعاتو قواعد او اړيکې په عام فهم او شهودي (کلکولس ته ورته) توګه د منطقي تسلسل په پام کې نيولو سره مطرح شوي. دلته غير معين انتګرال د مشتق معکوسې عمليې په توګه مطرح شوی، وروسته معين انتګرال له ريمان مجموعې څخه د عددي لړۍ په توګه تعريفيږي چې د نيوتن قضيې په ارايې سره دغه دوه انتګرالونه له يوه بل سره ونښليږي. دقيق تطبيقي مثالونه په ټولو برخو کې له موضوعاتو سره ضميمه دي. د ګراف په رسمولو، د بحراني نقطو په ټاکلو، د اعظمي او اصغري مسايلو تحليل، د انحنا په ډولونو، د منحني ګانو د عطف نقطې او په مبهم حالت کې د توابعو ليمت شمېرلو (هوپيتال قاعده) کې د مشتق کارونې ضمني مباحث دي د دې ترڅنګ په هندسي شمېرنو (د منحني ګانو طول او د توابعو ګراف په ذريعه محاط مساحتونو) کې د انتګرال استفاده د ځانګړو مثالونو سره يې مطرح شوي. د ځينو عامو هندسي شمېرنو لنډيز او د مثلثاتي نسبتونو د نوم ايښودنې علت د کتاب په وروستۍ برخه کې ضميمه شوي.

لومړی څپرکی

سیټونه او د اعدادو سیستم

د سیټونو نظریه د ریاضیاتو لومړنی مبحث دی چې د ریاضیکي مفاهیمو په تصنیف، ډلبندی او تشریح ته ښه انسجام ورکوي. د ریاضي ډېر شمېر مباحث د سیټونو قواعدو په ذریعه بیانیږي یعنې په ریاضي کې سیټ؛ ژبو کې ګرامر ته ورته مفهوم لري. د سیټ تیوری له بنسټ ایښودونکو څخه یو هم جرمني عالم ((کانتور)) دی. دغه څپرکی په لنډ ډول په یادو موضوعات بحث کوي او په دې توګه د اعدادو سیستم چې د ریاضي اصلي منشاء ګڼل کیږي؛ معرفي کوو.

1.1 د سیټ پېژندنه

په ریاضیکي توګه د سیټ بشپړ تعریف نه دی شوی، خو د توضیح لپاره یې باید ووایم چې: سیټ د نه تکراریدونکو مفاهیمو او شیانو ډله، مجموع او یا کلیکسیون دی لکه د جفت اعدادو سیټ، د اروپایي هیوادونو د پلازمېنو سیټ، د انټي بیوتیک درملو سیټ، د توبرکلوز ناروغانو سیټ، د ریاضي کتابونو سیټ، د بیولوژي کتابونو سیټ او داسې نور. هغه شیان چې یو سیټ جوړوي د سیټ عناصر او یا غړي بلل کیږي. سیټونه د انګرېزي په غټو تورو یعنې $A, B, C, \ldots$ او د سیټونو عناصر یې په وړو تورو یعنې $a, b, c, \ldots$ ښیي.

که x د A سیټ عنصر وي، $x \in A$ علامه (x په A سیټ کې شامل دی) او که x د A سیټ عنصر نه وي، $x \notin A$ سمبول (x په A سیټ کې شامل نه دی) کاریږي.

د سیټونو ښودنه

سیټونه؛ ځانګړنو ته یې په کتو سره کولی شو په دریو طریقو وښیو:

ساده طریقه: په دې طریقه کې سیټ د یوه لنډ عبارت په ذریعه بیانیږي، داسې چې د عناصرو کلي ځانګړتیا یې په { } قوس کې ذکر شوي وي. مثلا

{یو رقمي عددونه}=A او {وایروسونه} = B

مشرح طریقه: په تشریحي(مشرح) طریقه کې د سیټ عناصر په مستقیم او یا سمبولیک توګه فهرست کیږي، د غه طریقه هغه مهال ګټوره ده چې د سیټ عناصرو شمېر لږ وي.

مثلا

$$C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$D = \{a, b, c, d, e, \ldots, x, y, z\}$$

الجبري طريقه: که د سيټ عناصر ډېر وي، د سيټ منطقي ځانګړنې په سمبولیک او یا الجبري توګه د یوه ټاکلي عنصر پواسطه ښودل کیږي. یعنې په دې طریقه کې د سیټ عناصرو ځانګړنې، یوه متحول عنصر مثلا x ته منسوبوي، د ساري په توګه:

$$E=\{x : x^2-9=0\} \quad , \quad F=\{x : x=n^2, n=1,2,3,\cdots\}$$

ممکن وکولی شو یو سیټ په هره یوه پاسینۍ طریقه وښیو، خو د سیټ ځانګړتیا ته په کتو سره شاید یوه له دغو طریقو څخه د سیټ په ښودلو کې خورا ګټوره وي.

متناهي او نامتناهي سیټونه: که د یوه سیټ عناصرو شمېر معین وي؛ متناهي سیټ بلل کیږي لکه د انګلیسي الفبا تورو سیټ، د کال د ورځو سیټ او دې ته ورته نور. خو که د سیټ عناصرو شمېر بېنهایت وي، نامتناهي سیټ ورته ویل کیږي. لکه: د تاق اعدادو سیټ، د راتلونکو ورځو سیټ، د هغو اعدادو سیټ چې په دریو پوره تقسیم کېدلی شي او داسې نور.

مساوي سیټونه: A او B سیټونه مساوي دي، که چېرې دواړه د یو شان عناصرو درلودونکي وي نو لیکي چې $A=B$ ؛ په بله ژبه، دوه سیټونه له یوه بل سره هغه مهال مساوي دي چې د یوه سیټ ټول عناصر په بل سیټ کې شامل وي او یا بالعکس

که A او B سیټونه مساوي نه وي په $A\neq B$ توګه لیکل کیږي. مثلا

$$A=\{1,3,5,1,3\}, B=\{3,1,5\} \Rightarrow A=B$$

$$C=\{x,y,z\}, D=\{x,y,v\} \Rightarrow C\neq D$$

خالي سیټ: هغه فرضي سیټ دی چې هیڅ عنصر نلري، د هغو کسانو سیټ چې 9 متره قد (ونه) ولري او یا د هغو تاق اعدادو سیټ چې مربع یې جفت وي. خالي سیټ په $\emptyset$ علامه ښیي.

فرعي سیټ: که چېرې د A سیټ ټول عناصر په B سیټ کې شامل وي، A د B فرعي سیټ بلل کیږي نو لیکو چې:

$A\subset B$ (A د B فرعي سیټ دی)

$A\not\subset B$ (A د B فرعي سیټ نه دی)

د سیټونو ځانګړنې

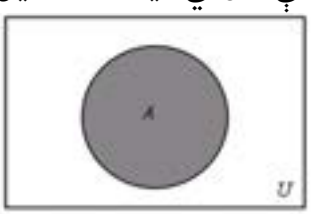
1. که چېرې $A\subset B$ او $B\subset A$ وي؛ پدې صورت کې $A=B$ ده،
2. $\emptyset$ سیټ د هر بل سیټ فرعي سیټ دی،
3. که چېرې $A\not\subset B$ وي، په دې صورت کې په A کې لا اقل یو عنصر شتون لري چې په B سیټ کې شامل نه وي،
4. هر سیټ، د خپل ځان فرعي سیټ دی. یعنې $A\subset A$ ،
5. که $A\subset B$ او $B\subset C$ وي؛ په دې صورت کې $A\subset C$ دی.

د سيټونو سيټ: هغه سيټ دی چې عناصر يې سيټونه وي، د سيټونو سيټ؛ د سيټونو کلاس، اصنافو سيټ، سيټونو ټولګي او يا د سيټونو کورنۍ په نامه هم يادېږي. هغه سيټ چې ټول عناصر يې د A سيټ فرعي سيټونه وي، د طاقت سيټ نومېږي او هغه په $P(A)$ ښيي. مثلا که $A=\{x, y, z\}$ وي په هغه صورت کې:

$$P(A)=\{\varnothing, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x,y\}, \{x,z\}, \{y,z\}, A\}$$

عمومي سيټ: که چېرې ټول د بحث وړ سيټونه په يوه کلي سيټ کې شامل وي، هغه ته عمومي سيټ وايي او په U علامه ښودل کيږي، مثلا د ټولو انساني ټولنو سيټونه د انسانانو سيټ؛ فرعي سيټونه دي. دلته د انسانانو سيټ عمومي سيټ دی، عمومي سيټ تل په نسبي توګه ښودل کيږي مثلا کله چې د حقيقي اعدادو له سيټونو خبرې کيږي، عمومي سيټ د حقيقي اعدادو سيټ دی، خو کله چې د حقيقي او مختلط اعدادو سيټ مطرح کيږي مختلط اعداد د عمومي سيټ په توګه فرضوو.

د ((وين)) دياګرام: د سيټونو عمومي ځانګړنو د توضيح په موخه، يو سيټ د ټرلي منحني خط په ذريعه ښودل کيږي او په دې شکل کې عمومي سيټ د مستطيل پواسطه افاده کوي(1.1 شکل).



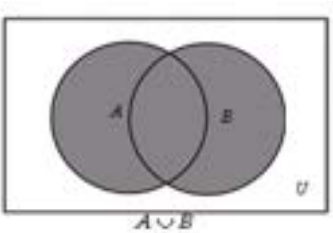
1.1 شکل

1.2 د سيټونو الجبري عمليې

لکه څنګه چې په اعدادو کې جمع، ضرب، تفريق او داسې نورې عمليې موجودې دي، په سيټونو کې هم کولی شو همدې ته ورته عمليې تعريف کړو:

د سيټونو اتحاد (د سيټونه ټولګه): د A او B سيټونو اتحاد له هغه سيټ څخه عبارت دی چې هر عنصر يې يا په A سيټ او يا هم په B سيټ کې شامل وي، يعنې:

$$A\cup B=\{x : x\in A\vee x\in B\}$$ يا



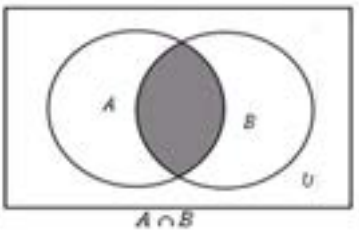
1.2 شکل

1 **مثال:** $A=\{a,b,c\}$ او $B=\{x,y,z\}$ سيټونو، $A\cup B$ سيټ عبارت دی له:

$$A\cup B=\{a\,,c\,,d\,,x\,,y\,,z\}.$$

د سيټونو تقاطع (د سيټونو ګډون): د A او B سيټونو تقاطع د دواړو سيټونو د مشترکو عناصرو څخه جوړ شوی سيټ دی. يعنې

$$\boxed{A\cap B=\{x:x\in A\ \wedge\ x\in B\}}$$



1.3 شکل

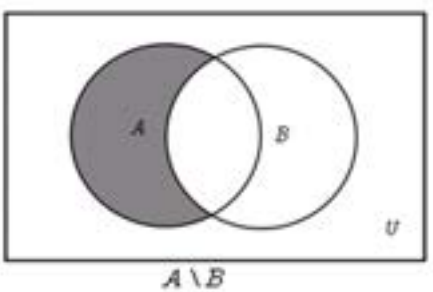
2 **مثال:** کـه چېـرې $A=\{0,1,2\}$ او $B=\{1,2,3\}$ راکـړل شـوي وي. پـه دې صـورت کـې $A\cap B=\{1,2\}$ دی.

مجزا (منفصل) سيټونه: که چېرې A او B مشترک عناصر ونلري، يعنې $A\cap B=\varnothing$ وي؛ په دې حالت کې A او B نسبت يوه بل ته مجزا ګڼل کيږي.

د سيټونو تفاضل: له A څخه د B سيټ تفاضل له هغه سيټ څخه عبارت دی چې عناصر يې د A اړوند وي او په B کې شامل نه وي، يعنې:

$$\boxed{A\setminus B=\{x:x\in A\,,x\notin B\}}$$

د A او B سيټونو تفاضل په $A\setminus B$ او يا $A\sim B$ سمبولونو ښيي.



1.4 شکل

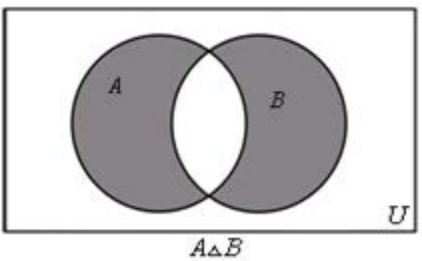
د سيټونو متناظر تفاضل: د $A\setminus B$ او $B\setminus A$ سيټونو اتحاد د A او B سيټونو متناظر تفاضل نومېږي او معمولا ليکي:

$$\boxed{A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)}$$

که ځیر شو نو لیدل کیږي چې:

$$\boxed{A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)}$$

او ضمنا $A\Delta B = B\Delta A$ ده.



$A \triangle B$

1.5 شکل

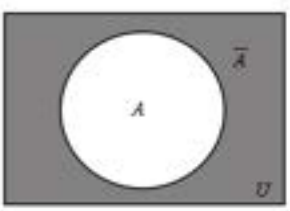
3 **مثال:** د $A = \{a,b,c,d\}$ او $B = \{f,b,d,g\}$ لپاره لرو چې $A \setminus B = \{a,c\}$ او $B \setminus A = \{f\ ,\ g\}$ پدې اساس

$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{a\ ,\ c\ ,\ f\ ,\ g\}$$

د سیټونو مکمله: د A سیټ مکمله د عمومي سیټ له عناصرو جوړ شوی سیټ دی چې په A کې شامل نه وي، په بل عبارت د U او A سیټونو تفاضل د A سیټ مکمله دی، یعنې

$$\boxed{\bar{A} = \{x:\ x \in U\ ,\ x \notin A\} = U \setminus A}$$

چې په $\bar{A}$ ، A' ، A^c او یا CA ښنو ښودل کیږي (1.6 شکل)



1.6 شکل

4 **مثال:** د $U = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ او $A = \{0,2,4,6,8\}$ لپاره لرو چې

$$\bar{A} = U \setminus A = \{1\ ,\ 3\ ,\ 5\ ,\ 7\ ,\ 9\}$$

د سیټونو کارتیزین ضرب: د A او B سیټونو کارتیزین ضرب د (x,y) مرتبو جوړو څخه جوړ شوی سیټ دی، داسې چې x د A او y د B عنصر وي:

$$\boxed{A \times B = \{(x,y) : x \in A, y \in B\}}$$

5 **مثال:** د $A = \{1,3,5\}$ او $B = \{0,2,4\}$ کارتیزین ضرب عبارت دی:

$$A \times B = \{(1,0),(1,2),(1,4),(3,0),(3,2),(3,4),(5,0),(5,2),(5,4)\}$$

د سيټونو الجبري ځانګړنې

1. $A \cup A = A \, , A \cap A = A$, 2. $A \cup B = B \cup A \, , A \cap B = B \cap A$
3. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
4. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
5. $A \cup \varnothing = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$, 6. $A \cup U = U$, $A \cap U = A$
7. $A \cup \overline{A} = U$, $A \cap \overline{A} = \varnothing$, 8. $\overline{\overline{A}} = A, \overline{U} = \varnothing, \overline{\varnothing} = U$
9. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$: $(Demorgan, s\ Law)$

د 9 شمېرې اړوند دوې اړیکې د ډیمورګان په قاعده معروف دي.

1.3 د حقیقي اعدادو سیستم

حقیقي اعداد په ځانګړو کلاسونو لکه، طبیعي اعداد، کامل اعداد، تام اعداد، نسبتي او غیر نسبتي اعدادو وېشل شوي چې دلته یې په لنډه توګه در پېژنو:

طبیعي اعداد (Natural Numbers): تر ټولو ساده مروج اعدادو لکه 1او 2او 3او 4او .... ته طبیعي اعداد وایي او د طبیعي اعدادو سیټ عبارت دی له:

$$\boxed{\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \cdots\}}$$

طبیعي اعداد د مثبت تام اعدادو په نامه هم یادیږي.

د طبیعي اعدادو شمېرنه: د طبیعي اعدادو د شمېرنو یوه مروجه سلسله عبارت ده له:

د رقم نوم	د رقم نوم	عددي مقدار	د رقم نوم	د رقم نوم	عددي مقدار
یو	*one*	1	زر	*thousand*	10^3
ملیون	*million*	10^6	بلیون	*billion*	10^9
تریلیون	*trillion*	10^{12}	کوادرلیون	*quadrillion*	10^{15}
کوونتیلیون	*quintillion*	10^{18}	سیکستیلیون	*sextillion*	10^{21}
سیپتیلیون	*septillion*	10^{24}	اوکتیلیون	*octillion*	10^{27}
نونیلیون	*nonillion*	10^{30}	ګوګول	*googol*	10^{100}

بلیون او ملیارد مفاهیم دا یوه بل معادل دي او عددي مقدار یې عبارت دی له $10^9 = 1000\,000\,000$ څخه.

له طبيعي اعدادو سره لوبې

طبيعي اعداد له يوه بل سره ډېر شمېر سرګرم کوونکې او جالبې اړيکې لري، دلته يې څو مثالونه د ښېلګې په ډول ښيو:

$$3+24=27 \quad , \quad 3\times 24=72 \quad , \quad 9+9=18 \quad , \quad 9\times 9=81$$

$$2+497=499 \quad , \quad 2\times 497=994 \quad , \quad 2+47=49 \quad , \quad 2\times 47=94$$

$$(11)^2=121 \quad , \quad (111)^2=12321 \quad , \quad (1111)^2=1234321 \quad , \quad (11111)^2=123454321$$

$$(111111)^2 = 12345654321 \quad , \quad (1111111)^2 = 1234567654321$$

$$(11111111)^2=123456787654321 \quad , \quad (111111111)^2=12345678987654321$$

$$(12345679)\times(99999999)=1234567887654321$$

کامل اعداد (Whole Numbers): د صفر په شمول د طبيعي اعدادو څخه جوړ شوي سيټ ته د کامل اعدادو سيټ وايي او په سمبولیکه بڼه په لاندې ډول ښودل کيږي:

$$\mathbb{N}^{\bullet}=\{0,1,2,3,4,\cdots\}$$

د طبيعي(کامل) اعدادو جوړو حاصل ضرب او يا حاصل جمع بيا هم يو طبيعي(کامل) عدد راکوي.

تام اعداد (Integer Numbers): د کامل اعدادو او تام منفي اعدادو متشکل سيټ ته د تام اعدادو سيټ وايي:

$$\boxed{\mathbb{Z}=\{\cdots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\cdots\}}$$

په تام اعدادو کې جمع، تفريق او ضرب عمليې ترلې دي، يعنې په تام اعدادو کې د هرې جوړې جمع، تفريق او ضرب ببرته تام عدد په لاس راکوي.

نسبتي اعداد يا ناطق اعداد(Rational Numbers) . هغه اعداد چې د دوو تام اعدادو د نسبت په توګه وښودل شي نسبتي اعداد نومېږي. په نسبتي اعدادو کې صفر هيڅکله نشو کولی په مخرج کې وکاروو:

$$\boxed{\mathbb{Q}=\left\{x:x=\frac{m}{n}\ ,\ m\ ,\ n\in\mathbb{N},n\neq 0\right\}}$$

هر تام عدد يو نسبتي عدد دی، ځکه تام عدد کېدای شي د هغه کسري عدد په توګه هم مطرح شي چې مخرج يې 1 وي. په نسبتي اعدادو کې څلور عمليې؛ جمع، تفريق، ضرب، او تقسيم ترلې دي يعنې که x او y دوه نسبتي اعداد وي، $x+y$ ، xy ، $x-y$ او $\frac{x}{y}$ نسبتي اعداد دي. البته په تقسيم کې مقسوم عليه صفر نشي کېدای.

د ناطق عدد په توګه متوالي کسر: هر نسبتي عدد د عادي يا متوالي اعشار کسر په توګه ښودل کېدای شي او بالعکس هر عادي يا متوالي کسر يو نسبتي عدد دی. مثلا $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$ ، $\frac{124}{999} = 0.\overline{124}$ ، $\frac{5}{13} = 0.\overline{076923}$ او دې ته ورته نور.

1 **مثال:** وښیئ چې $0.12\overline{651}$ متوالي کسر يو ناطق عدد دی.

حل : که $x = 0.12651\,651\,651\cdots$ وضع کړو ، د دې مساوات اطراف په ترتیب له 100 000 او 100 اعدادو سره ضرب کوو او بیا يې طرف په طرف له يوه بله منفي کوو.

$$\left.\begin{array}{r} 100\,000x = 12651.651\,651\cdots \\ 100x = \quad 12.651\,651\cdots \\ \hline 99900x = 12\,639 \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{12\,639}{99900} \Rightarrow 0.12\overline{651} = \frac{12\,639}{99900}$$

په دې اساس $0.12\overline{651} = \frac{12\,639}{99900}$ ، يعنې $0.12\overline{651}$ يو ناطق عدد دی.

2 **مثال.** $0.528\overline{47}$ عدد په عام کسر واړوئ.

حل : د مخکيني مثال په پام کې نيولو سره دغه عدد له هغه کسر سره مساوي دی چې صورت يې 52319 او مخرج يې 99 000 وي ، يعنې

$$0.528\overline{47} = \frac{52847 - 528}{99000} = \frac{52319}{99000}$$

نو د هر متوالي رقم پرځای په مخرج کې 9 او د هر غير متوالي رقم لپاره په مخرج کې 0 کاريږي.

د ناطق اعدادو ځينې ځانګړنې

هغه کسرونه چې مخرج يې 7 وي په اعشاري سيستم کې داسې ليکل کيږي:

$$\frac{1}{7} = 0.\overline{142857} \quad , \quad \frac{2}{7} = 0.\overline{285714} \quad , \quad \frac{3}{7} = 0.\overline{428571}$$

$$\frac{4}{7} = 0.\overline{571428} \quad , \quad \frac{5}{7} = 0.\overline{714285} \quad , \quad \frac{6}{7} = 0.\overline{857142}$$

ليدل کيږي چې په پاسينيو شپږو اعدادو کې متوالي ارقام په يوه معين ترتيب سره دوران مومي. په همدې ترتيب هغه کسرونه چې مخرجونه يې 13 ، 17 ، 23 ، 31 او دې ته ورته وي د متوالي کسرونو په توګه ډېر جالب او مرتب ارقام لري.

غير نسبتي اعداد (Irrational Numbers): هغه اعشاري کسرونه چې له اعشاريې وروسته ارقام يې نه ختم شي او نه متوالي وي. غيرناطق (غيرنسبتي) اعداد بلل کيږي، مثلا $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{3}$ ، $\sqrt{7}$ ، e او π غير ناطق اعداد دي:

$$\sqrt{2} = 1.41421413\cdots \quad , \quad \sqrt{3} = 1.7320508\cdots \quad , \quad \sqrt{7} = 2.6457513\cdots$$

$$e = 2.7182818284\cdots \quad , \quad \pi = 3.1415926535\cdots \quad , \quad \frac{1}{\pi} = 0.318309886\cdots$$

د غير نسبتي اعدادو سيټ په $\mathbb{Q}'$ يا $\overline{\mathbb{Q}}$ سمبول ښودل کيږي.

3 **مثال:** وښيئ چې $\sqrt{2}$ يو نسبتي عدد نه دی (غير نسبتی دی).

ثبوت: فرضوو چې $\sqrt{2}$ يو نسبتي عدد وي، نو کېدای شي په $\frac{m}{n}$ توګه وښيو، داسې چې m او n طبيعي اعداد وي او هيڅ مشترک عامل ونلري. يعنې

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$$

د پاسيني مساوات د اطراف له مربع کولو وروسته لرو چې:

$$(\sqrt{2})^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 \Rightarrow 2 = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow m^2 = 2n^2$$

ليدل کيږي چې m^2 يو جفت عدد دی نو m هم جفت دی او کولی شو $m = 2k$ وضع کړو داسې حال کې چې k يو طبيعي عدد دی. په دې صورت کې

$$(2k)^2 = 2 \times n^2 \Rightarrow n^2 = 2k^2$$

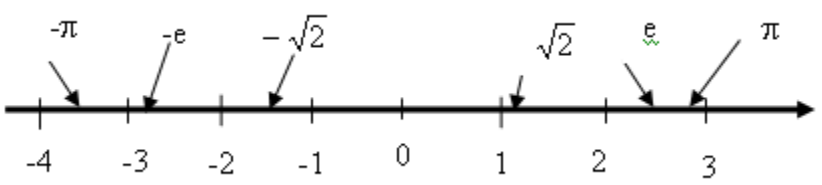
په دې اساس n^2 هم جفت دی. نو ويلی شو چې n يو جفت عدد دی يعنې $\frac{m}{n}$ کسر مشترک عامل (2) لري او دا د فرضيې خلاف دی، نو نتيجه اخلو چې $\sqrt{2}$ نسبتي عدد نه دی. •

حقيقي اعداد (Real Numbers): د نسبتي او غير نسبتي اعدادو د اتحاد څخه جوړ شوي سيټ ته د حقيقي اعداد سيټ وايي د حقيقي اعدادو سيټ په $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$ سمبول ښودل کيږي، يعنې $\mathbb{Q}' = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ په دې ترتيب:

$$\boxed{\mathbb{N} \subset \mathbb{N}^* \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \ , \ \mathbb{Q}' \subset \mathbb{R} \ , \ \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' = \mathbb{R} \ , \ \mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \varnothing}$$

د حقيقي اعدادو محور: يو مستقيم جهت لرونکی خط په پام کې نيسو چې يوه نقطه يې د پيل (د صفر عدد ځای) په توګه قبلوو، د مناسب قياسي واحد په پام کې نيولو سره مثبت اعداد ښی لور ته او منفي اعداد له مبدا څخه کينې خوا ته ځای پرځای کيږي، په دې صورت کې د هر حقيقي عدد لپاره د دې مستقيم خط پرمخ يو ځای او بالعکس د مستقيم خط پرمخ هرې نقطې لپاره يو حقيقي عدد مطابقت کوي.

د غه مستقيم خط ته د حقيقي اعدادو محور وايي (1.7 شکل).



1.7 شکل

د حقيقي اعدادو الجبري ځانګړنې: a ، b او c حقيقي اعداد لاندې ځانګړنې لري.

ځانګړنه	د جمع عملیې لپاره	د ضرب عملیې لپاره
تړون	$(a+b)\in\mathbb{R}$	$ab\in\mathbb{R}$
تبد یلي	$a+b=b+a$	$ab=ba$
اتحادي	$a+(b+c)=(a+b)+c$	$a(bc)=(ab)c$
د عینیت عنصر شتون	$a+0=a$	$a\times 1=a$
د معکوس عنصر شتون	$a+(-a)=0$	$a\left(\frac{1}{a}\right)=1$
په جمع کې دضرب توزیعي	$a(b+c)=ab+ac$	

1.4 په حقيقي اعدادو کې ترتيب

په دې پاراګراف کې د حقيقي اعدادو ترتيب او ځای، د اعدادو انتروالونه، د حقيقي اعدادو مطلق قيمت او اړوند قواعد يې معرفي کيږي.

د ترتيب اصل: د هر a او b حقيقي اعدادو جوړې لپاره يو له لاندې دريو حالتونو څخه صدق کوي:

$$a>b \quad , \quad a=b \quad , \quad a<b$$

د ترتيب اړيکې ځانګړنې: د a ، b او c حقيقي اعدادو لپاره د ترتيب اړيکه لاندې ځانګړنې لري:

انتقالي قانون
1. $a<b \ , \ b<c \ \Rightarrow \ a<c$

د جمع قانون
2. $a<b \ \Rightarrow \ a+c<b+c$

د ضرب قانون
3. $a<b \ , \ c>0 \ \Rightarrow \ ac<bc$
4. $a<b \ , \ c<0 \ \Rightarrow \ ac>bc$

5. $ab>0 \Rightarrow (a>0 \wedge b>0) \vee (a<0 \wedge b<0)$ د دوو هم اشاره اعدادو ضرب
6. $ab<0 \Rightarrow (a>0 \wedge b<0) \vee (a<0 \wedge b>0)$ د دوو مختلف الاشاره اعدادوضرب

د اعدادو انتروالونه: $a\le b$ مفهوم په دې معنی دی چې ((a له b څخه وړه يا مساوي ده))، ((a له b څخه لوی يا مساوی دی)) عبارت په $a\ge b$ سمبول ښودل کيږي.

1ـ **خلاص انتروال:** له a څخه تر b پورې خلاص انتروال، د x حقيقي اعدادو له سيټ سره مساوي دی داسې چې $a<b$ وي يعنې:

$$(a,b)=\{x\in\mathbb{R}:a<x<b\}$$

2ـ **تړلي انتروال:** x د حقيقي اعدادو سيټ دی داسې چې $a\le x\le b$ وي، يعنې:

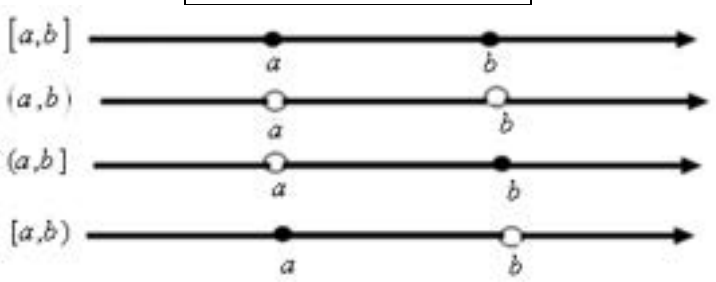
$$\boxed{[a,b]=\{x\in\mathbb{R}:a\le x\le b\}}$$

3ـ له ښي لور څخه نیم تړلي (له کین خوا څخه نیم خلاص) انتروال:

$$(a,b]=\{x\in\mathbb{R}:a<x\le b\}$$

4ـ له کین لور څخه نیم تړلي (له ښی خوا څخه نیم خلاص) انتروال:

$$[a,b)=\{x\in\mathbb{R}:a\le x<b\}$$



1.8 شکل

که چېرې د یوه انتروال په پای کې $+\infty$ او $-\infty$ مفاهیم لیکل شوي وي اړونده پای(انجام) خلاص دی، لکه: $(0,\infty)$, $(-\infty,0)$, $\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$

1 **مثال:** $11x-2>3x+9$ غیر مساوات حل کړی.

حل. یوازې د غیر مساوات له ځانګړنو ګټه اخیستل کیږي:

$$11x-2>3x+9\Rightarrow 11x-2+2>3x+9+2$$
$$\Rightarrow 11x>3x+11\Rightarrow 11x-3x>3x-3x+11$$
$$\Rightarrow 8x>11\Rightarrow x>\frac{11}{8}$$

په دې اساس د پاسیني غیر مساوات حل $(\frac{11}{8},\infty)$ سیټ دی.

2 **مثال:** لاندې نامساوات حل کوو:

$$-4\le 3x+8\le 23 \;\Rightarrow\; -4-8\le 3x+8-8\le 23-8$$
$$\Rightarrow -12\le 3x\le 15\Rightarrow \frac{-12}{3}\le x\le\frac{15}{3}\Rightarrow -4\le x\le 5$$

په دې اساس د پاسیني غیر مساوات حل $[-4,5]$ سیټ دی.

3 **مثال:** x اعداد راپیدا کړی داسې چې په یوه وخت کې لاندې غیرمساوات رینښتینې کړي:

$$\begin{cases} x+1 > -3 \\ 3x-2 \le x \end{cases}$$

حل:

$$\begin{cases} x+1>-3\Rightarrow x>-1-3\Rightarrow x>-4 \\ 3x-2\le x\Rightarrow 3x-x\le 2\Rightarrow x\le 1 \end{cases}\Rightarrow -4<x\le 1$$

په دې اساس x له $(-4,1]$ سيټ څخه عبارت دی.

يادونه: له $ab>0$ نامساوات څخه پايله اخيستل کيږي چې a او b هم اشاره دي په همدې ترتيب $ab<0$ نامساوات ښيي چې a او b مختلف الاشاره دي.

4 **مثال:** $x^2-9>0$ نامساوات حل کړئ.

حل:

$$x^2-9>0\Rightarrow (x-3)(x+3)>0\Rightarrow \begin{cases} x-3>0\ ,\ x+3>0\Rightarrow x>3 \\ x-3<0\ ,\ x+3<0\Rightarrow x<-3 \end{cases}$$

په دې اساس د حل سيټ هغه حقيقي اعداد دي چې له $[-3,3]$ انتروال څخه بهر ځای لري.

5 **مثال:** $x^2-7x<-12$ غير مساوات حل کړئ.

حل:

$$x^2-7x<-12\Rightarrow x^2-7x+12<0\Rightarrow (x-3)(x-4)<0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-3<0\ ,\ x-4>0\Rightarrow x<3\ ,\ x>4 & \ldots \quad (i) \\ x-3>0\ ,\ x-4<0\Rightarrow x>3\ ,\ x<4\Rightarrow 3<x<4 & \ldots \quad (ii) \end{cases}$$

واضح ده چې (i) حالت غير ممکن حالت او (ii) حالت مطلوب امکان دی، يعنې

$$3<x<4\Leftrightarrow x\in(3,4).$$

د حقيقي اعدادو مطلقه قيمت: د يوه عدد مطلقه قيمت ـ په حقيقت کې له مبدا (پيل) څخه د هماغه عدد د واټن اوږدوالی دی. د تعريف سره سم د x حقيقي عدد مطلقه قيمت عبارت دی له:

$$|x| = \begin{cases} x & , \quad x\geq 0 \\ -x & , \quad x<0 \end{cases}$$

6 **مثال:**

$$|0|=0 \quad , \quad |8|=8 \quad , \quad |-9|=9 \quad , \quad \left|\tfrac{1}{3}-2\right|=2-\tfrac{1}{3}$$

د مطلقه قيمت ځانګړنې: که چېرې x ، y او a حقيقي اعداد او a مثبت وي، په دې صورت کې

1. $|x-y|=|y-x|$, 2. $|x|<a\Rightarrow -a<x<a$
3. $|x|>a\Rightarrow x>a\vee x<-a$, 4. $|x+y|\leq|x|+|y|$
5. $|x-y|\geq|x|-|y|$, 6. $|xy|=|x|.|y|$, 7. $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}$

2 او 3 ځانګړنې کولی شو په لاندې ډول هم فورمول بندي کړو:

$$|x|<a\Leftrightarrow x\in(-a\ ,a) \quad , \quad |x|>a\Leftrightarrow x\notin(-a\ ,a)$$

7 **مثال:** $|x+4|<5$ غير مساوات حل کړئ.

حل: $|x+4|<5\Rightarrow -5<x+4<5\Rightarrow -5-4<x<5-4\Rightarrow -9<x<1$

8. **مثال:** $|2x-8|>6$ نامساوات حل کړئ.

حل:

$$|2x-8|>6 \Rightarrow \begin{cases} 2x-8>6 \Rightarrow 2x>6+8 \Rightarrow 2x>14 \Rightarrow x>7 \\ 2x-8<-6 \Rightarrow 2x<-6+8 \Rightarrow 2x<2 \Rightarrow x<1 \end{cases}$$

په دې اساس $x>7$ او یا $x<1$ د غیر مساوات حل دی ، یعنې

$$x \in (-\infty,1) \cup (7,\infty)$$

1.5 مختلط اعداد

که څه هم داسې انګېرل کیږي چې حقیقي اعدادو د شمېرنو اړتیاوې پوره کړي، خو د مختلط اعدادو سیټ چې په اصل کې د حقیقي اعدادو د سیټ تعمیمي حالت دی، د دې سره سره چې په لومړیو کې ډېر مبهم مفهوم ګڼل کېدو ، بیا هم د فزیک او ریاضي د ډېرو مسایلو په توضیح او تشریح کې یې مهم رول او زیات اهمیت لري. دلته د مختلط اعدادو لومړني مفاهیم په لنډ ډول مطرح شوي.

موهومي اعداد: په ai بڼه عدد چې پکې a حقیقي عدد او $i^2=-1$ فرض شوی، موهومي عدد نومیږي نو د تعریف سره سم د موهومي اعدادو سیټ عبارت دی له:

$$\boxed{I=\{x : x=ai \ , a\in\mathbb{R} . i^2=-1\}}$$

i عدد ته موهومي واحد وایي.

د مختلط اعدادو پېژندل: په $z=x+yi$ شکل اعداد ، داسې چې x او y حقیقي اعداد او $i^2=-1$ فرض شوی وي د مختلط اعدادو په نامه یادیږي په دې توګه مختلط اعداد د موهومي او حقیقي اعدادو له ترکیب څخه ترلاسه شوي او د مختلط اعدادو سیټ عبارت دی له

$$\boxed{\mathbb{C}=\{z : z=x+yi \ , x,y\in\mathbb{R} , i^2=-1\}}$$

په $z=x+yi$ مختلط عدد کې x عدد حقیقي برخه او y عدد موهومي برخه ده او لیکو:

$$x:=\mathrm{Re}(z) \quad , \quad y:=\mathrm{Im}(z)$$

واضح ده چې موهومي او حقیقي اعداد ، د مختلط اعدادو فرعي سیټونه دي، یعنې:

$$\forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow x=x+0i\in\mathbb{C}$$
$$\forall yi\in I \Rightarrow yi=0+yi\in\mathbb{C}$$
$$\boxed{\mathbb{R}\subset\mathbb{C} \quad , \quad I\subset\mathbb{C}}$$

د مختلط اعدادو مساوي والي: $z_1=x_1+y_1i$ او $z_2=x_2+y_2i$ اعداد له یوه بل سره یوازې په هغه صورت کې مساوي دي چې حقیقي او موهومي برخې یې له یوه بل سره مساوي وي، یعنې:

$$z_1=z_2 \Leftrightarrow x_1=x_2 , y_1=y_2$$

د مختلط اعدادو جمع او تفريق: د $z_1 = x_1 + y_1 i$ او $z_2 = x_2 + y_2 i$ مختلط اعدادو د جمع او تفريق حاصل عبارت دی له:

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + y_1 i) \pm (x_2 + y_2 i) = (x_1 \pm x_2) + (y_1 \pm y_2) i$$

1 مثال: د $z_1 = 2 + 3i$ او $z_2 = 4 + 5i$ لپاره لرو

$$z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (4 + 5i) = 6 + 8i$$

$$z_1 - z_2 = (2 + 3i) - (4 + 5i) = -2 - 2i$$

د مختلط اعدادو ضرب: د $z_1 = x_1 + y_1 i$ او $z_2 = x_2 + y_2 i$ مختلط اعدادو ضرب د $i^2 = -1$ او اړونده الجبري قواعدو په پام کې نیولو سره یې عبارت دی

$$z_1 z_2 = (x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) = x_1 x_2 + x_1 y_2 i + y_1 x_2 i + y_1 y_2 i^2$$

$$\Rightarrow z_1 z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + (x_1 y_2 + y_1 x_2) i$$

د مختلط اعدادو په ضرب عملیه کې تبدیلي، اتحادي او توزیعي ځانګړنې صدق کوي او ثبوت یې هم ډېر ګران کار نه دی.

د i عدد توانونه

$$i^0 = 1 \quad , \quad i^1 = i \quad , \quad i^2 = -1 \quad , \quad i^3 = -i$$

$$i^4 = 1 \quad , \quad i^5 = i \quad , \quad i^6 = -1 \quad , \quad i^7 = -i$$

$$\boxed{i^{4n+1} = i \ , \ i^{4n+2} = -1 \quad , \quad i^{4n+3} = -i \ , \ i^{4n} = 1}$$

په دې اساس د i هر طبیعي توان یو له i ، 1 ، $-i$ او -1 اعدادو څخه دی.

2 **مثال:** i^{47} عدد محاسبه کړئ.

حل: که 47 پر 4 تقسیم شي، خارج قسمت 11 او باقیمانده 3 به ترلاسه کیږي، نو

$$i^{47} = i^{4\times 11+3} = i^{4\times 11} i^3 = (i^4)^{11} i^3 = 1^{11} i^3 = i^3 = -i$$

د مختلط عدد مزدوج: د $z = x + yi$ مختلط عدد مزدوج عبارت دی له $\bar{z} = x - yi$ څخه، نو لیدل کیږي چې

$$z\bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 - (yi)^2 = x^2 + y^2$$

$$z + \bar{z} = (x + yi) + (x - yi) = 2x = 2\,\mathrm{Re}(z)$$

$$z - \bar{z} = (x + yi) - (x - yi) = 2yi = 2\,\mathrm{Im}(z)$$

3 **مثال:** د $z = 3 + 4i$ عدد مزدوج عبارت دی له $\bar{z} = 3 - 4i$ څخه او

$$z\bar{z} = (3 + 4i)(3 - 4i) = 9 + 16 = 25$$

$$z + \bar{z} = (3 + 4i) + (3 - 4i) = 6$$

$$z - \bar{z} = (3 + 4i) - (3 - 4i) = 8i$$

د مختلط اعدادو تقسيم: $z_1 = x_1 + y_1 i$ عدد پر $z_2 = x_2 + y_2 i$ عدد په لاندې توګه تقسيميږي:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i} = \frac{(x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i)}{(x_2 + y_2 i)(x_2 - y_2 i)} = \frac{x_1 x_2 - x_1 y_2 i + y_1 x_2 i - y_1 y_2 i^2}{x_2^2 - y_2^2 . i^2}$$

$$\Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2^2 + y_2^2} i$$

4 **مثال:** $z_1 = 2 - 3i$ عدد په $z_2 = 1 + i$ تقسيم کړئ.

حل:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 - 3i}{1 + i} = \frac{(2 - 3i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{-1 - 5i}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{5}{2} i .$$

د مختلط عدد مطلق قيمت: د $x + yi$ عدد مطلق قيمت د تعريف مطابق عبارت دی له:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

د مطلق قيمت ځانګړنې: که چېرې z_1 او z_2 دوه حقيقي اعداد وي په دې صورت کې:

$$I. \ |z_1 - z_2| = |z_2 - z_1| \ , \ II. \ |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$$

$$III. \ |z_1 - z_2| \ge |z_1| - |z_2| \ , \ IV. \ |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

$$V. \ \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \ , \ z_2 \neq 0$$

5 **مثال:** د $z = 3 + 4i$ عدد مطلق قيمت ترلاسه کوو.

$$|z| = |3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

6 **مثال:**

$$I. \ |5 - 2i| = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$$

$$II. \ |-6| = |-6 + 0i| = \sqrt{(-6)^2 + 0^2} = \sqrt{36} = 6$$

$$III. \ |4i| = |0 + 4i| = \sqrt{0^2 + 4^2} = \sqrt{16} = 4$$

1.6 د څپرکي لنډيز

سيټ - د غير تکراري شيانو او مفاهيمو ډله، ګروپ او يا کليکسيون دی.

د سيټونو اتحاد (د سيټونو ډله) $A \cup B = \{ x : x \in A \vee x \in B \}$

د سيټونو تقاطع (د سيټونو ګډون) $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$

د سيټونو متناظر تفاضل $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \equiv (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

د A سيټ مکمله $\overline{A} = \{x : x \in U , x \notin A\} = U \setminus A$

د A او B سيټونو کارتيزين ضرب $A \times B = \{(x , y) : x \in A , y \in B\}$

د طبيعي اعدادو سيټ $\mathbb{N} = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , \cdots \}$

د کامل اعدادو سيټ $\mathbb{N}^{\bullet} = \{0 , 1 , 2 , 3 , 4 , \cdots\}$

د تام اعدادو سيټ $\mathbb{Z} = \{\cdots , -3 , -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3 , \cdots\}$

د نسبتي اعدادو سيټ $\mathbb{Q} = \left\{ x : x = \frac{m}{n} \ , \ m \ , \ n \in \mathbb{N} , n \neq 0 \right\}$

متوالي اعشار کسرونه - نسبتي اعداد دی.

غير ناطق اعداد (غير نسبتي اعداد) - هغه اعشاري کسرونه چې د اعشاريې علامې وروسته ارقام يې نه ختم شي او نه متوالی وي لکه $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{3}$ ، $\sqrt{7}$ ، e ، π او داسې نور اعداد.

حقيقي اعداد $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$

خلاص انتروال $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

تړلی انتروال $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$

له ښۍ خوا نيم تړلی (له کيڼ لوري نيم خلاص) انتروال $(a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$

له کيڼې خوا نيم تړلی (له ښۍ لوري نيم خلاص) انتروال $[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$

مطلقه قيمت $|x| = \begin{cases} x & , \quad x \geq 0 \\ -x & , \quad x < 0 \end{cases}$

مخلط اعداد $\mathbb{C} = \{z : z = x + yi \ , x , y \in \mathbb{R} , i^2 = -1\}$

د مختلط عدد مزدوج $z = x + \mathrm{yi}$ $\overline{z} = x - yi$

د مختلط عدد مطلق قيمت $z = x + \mathrm{yi}$ $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

د اعدادو د سيټونو اړيکې $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}^* \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' , \mathbb{Q}' \subset \mathbb{R} , \mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \varnothing$

د رياضي ځينې سمبولونه

مفهوم	سمبول	مفهوم	سمبول
د طبيعي اعدادو سيټ	$\mathbb{N}$	سيټ مکمل A	$\overline{A}$
د تام اعدادو سيټ	$\mathbb{Z}$	هرعنصر	$\forall$
د ناطق اعدادو سيټ	$\mathbb{Q}$	ځينې عناصر	$\exists$
د غير ناطق اعدادو سيټ	$\mathbb{Q}'$	اړين شرط	$\Rightarrow$
د حقيقي اعدادو سيټ	$\mathbb{R}$	کافي شرط	$\Leftarrow$
د مختلط اعدادو سيټ	$\mathbb{C}$	اړين او کافي	$\Leftrightarrow$
خالي سيټ	$\varnothing$	معادل	$\sim$
د سيټونو تقاطع	$\cap$	مساوي	$=$
د سيټونو اتحاد	$\cup$	مطابق	$\equiv$
عنصر دی A د x	$x \in A$	منطبق	$\cong$
عنصر نه دی A د x	$x \notin A$	وړوکی	$<$
فرعي سيټ دی B د A	$A \subset B$	لوی	$>$
فرعي سيټ نه دی B د A	$A \not\subset B$	بينهايت	∞

1.7 تمرين

1. که چېرې $M = \{r,s,t\}$ وي، د لاندينيو سمبولونو څخه کوم يو سهي دی.

$$a.\ \ r \in M \quad , \quad b.\ \ r \subset M \quad , \quad c.\ \ \{r\} \in M \quad , \quad d.\ \ \{r\} \subset M$$

2. د $\{r,s,t\}$ ، $\{t,r,s,t\}$ او $\{r,t,r\}$ سيټونو کومه جوړه له يوه بل سره مساوي ده.

3. د $A = \{x,y,z\}$ ټول فرعي سيټونه وليکئ او ووايئ چې د فرعي سيټونه د شمېر او د عناصرو د شمېر ترمنځ يې څه اړيکه پرته ده؟

4. که چېرې $A = \{2, \{4,5\}, 4\}$ او $B = \{4,5\}$ وي، کومه لاندينۍ اړيکه سمه ده.

$$B \subset A \quad , \quad B \in A \quad , \quad \{5\} \in A \quad , \quad \{5\} \subset A$$

5. که A={1,2,3,4} ، B={2,4,6,8} او C={3,4,5,6} وي، لاندې سيټونه ترلاسه کړئ.

$$A \cup B \quad , \quad A \cup C \quad , \quad B \cap C \quad , \quad B \cap B$$

6. که چېرې $A = \{a,b,x,y\}$ ، $B = \{x,y,z\}$ او $C = \{y,d\}$ وي. لاندې سيټونه مشخص کړئ.

$$A - B \quad , \quad B - A \quad , \quad B - C \quad , \quad C - B$$

7. لاندې سيټونه د ډياګرام په ذريعه وښيئ.

$$A \cap (B \cup C) \quad , \quad (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) \quad , \quad (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

8. که چېرې U د مثبت يو رقمي اعدادو سيټ، A د جفت يو رقمي اعداد سيټ او B د يو رقمي طاق اعدادو سيټ وي، $\overline{A}$ ، $\overline{B}$ ، $\overline{A-B}$ ، $A-\overline{B}$ ، $\overline{A}-\overline{B}$ او $\overline{\overline{A}}$ سيټونه وليکئ.

9. لاندني هر يو عدد د اعشار کسر په توګه وليکئ.

$$\frac{1}{7} \quad , \quad \frac{7}{8} \quad , \quad \frac{3}{4} \quad , \quad \frac{23}{99} \quad , \quad \frac{9}{7}$$

10. کوم يو لاندينئ عدد نسبتي دی.

$$0.123\,591\,08\cdots \quad , \quad 0.125\overline{4} \quad , \quad 3.\overline{0} \quad , \quad 3\sqrt{7} \quad , \quad 1.6 \quad , \quad 3.333\cdots$$

11. وښيئ چې: $a<0 \quad , \quad c>0 \quad \Rightarrow \quad a<c$

12. ثبوت کړئ چې: $c<d<0 \quad \Rightarrow \quad c^2>d^2$

13. لاندې عددي سيټونه د اعدادو محور پرمخ وټاکئ:

$$I.\ x \geq 2 \quad , \quad II.\ -1 \leq x < 3 \quad , \quad III.\ (-2,8]$$
$$IV.\ x<-3, \quad V.\ (-4,4] \quad , \quad VII.\ [-4,4]$$

14. لاندې نامساوات حل کړئ:

$$I.\ x+8<14 \quad , \quad II.\ 2x+4 \leq 3x+9 \quad , \quad III.\ x^2<16$$
$$IV.\ -4<3x+5<1 \quad , \quad V.\ (x+1)(x+2)(x-3)<0$$

15. وښيئ چې:

$$I.\ b>1 \ \Rightarrow \ b^2>b \quad , \quad II.\ a>0, b>0 \Rightarrow \tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{b} \geq \tfrac{2}{a+b}$$
$$III.\ a^2+b^2 \geq 2ab \quad , \quad IV.\ a>0 \ \Rightarrow \ a+\tfrac{1}{a} \geq 2$$

16. لاندې نامساوات حل کړئ.

$$I.\ |2-8x| \leq 6 \quad , \quad II.\ |x+2|>5 \quad , \quad III.\ |2x-1|<\tfrac{1}{10}$$

17. لاندې غير مساواتونه د مطلق قيمت په مرسته وښيئ.

$$I.\ -2<x<2 \quad , \quad II.\ -8<x-3<8 \quad , \quad III.\ x>4 \ \ or \ \ x<-4$$

لاندې افادې وشمبرئ.

18. $(2+3i)+(3-2i)$, 19. $(2+3i)(2-3i)$

20. $(4+i)(3+2i)(1-i)$, 21. $(2-i)^2$

22. $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2-2\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2$, 23. $\frac{(2i)^3+i^{25}}{2i-1}$

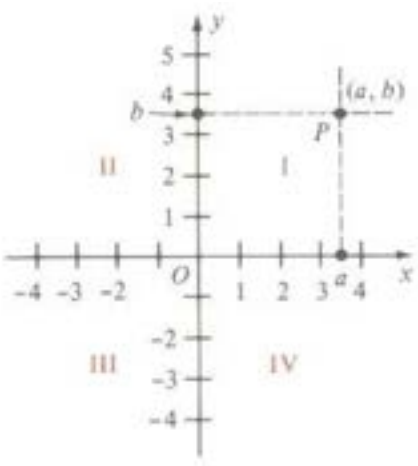
دويم څپرکی

د مختصاتو سيستمونه، مستقيم خط او دايره

تحليلي هندسه د رياضياتو مهم مبحث دی چې هندسي قواعد د الجبري دستورونو په ذريعه تحليلوي. د دې علم بنسټ ايښودونکی فرانسوي رياضي پوه دکارت دی. ځينې مهال تحليلي هندسه د کارتيزين هندسې په نامه چې کارتيزوس(د دکارت دويم نوم) ته منسوب ده؛ يادېږي. په دې څپرکی کې د مختصاتو سيستمونه په مستوي کې مستقيم خطونه او دايره د تحليلي هندسې لومړنيو مفاهيمو په توګه تر بحث لاندې نيول کېږي.

2.1 د قايم مختصاتو سيستم پېژندنه

د حقيقي اعدادو دوه عمودا متقاطع محورونه داسې په پام کې نيسو، چې د تقاطع نقطه يې د مبدا او د افقي محور نېسي لور او د عمودي محور پاس خوا يې د مثبت جهت په توګه تاکل شوې وي(2.1 شکل). که چېرې P د مستوي اختياري نقطه وګڼل شي، له P څخه دوه موازي خطونه له افقي او عمودي محور سره رسموو دغه خطونه افقي محور په x او عمودي محور په y نقطو کې قطع کوي، په دې اساس P د يو جوړه حقيقي اعدادو (x, y) سره مطابقت لري. دلته عدد د x نقطې واټن او y د P نقطې ترتيب ګڼل کېږي په دې توګه د هر جوړه حقيقي اعدادو لپاره په مستوي کې يوه نقطه او بالعکس د مستوي هرې نقطې ته يو جوړه حقيقي اعداد اړوند دي، د پاسينيو محورونو سيستم؛ د مختصاتو قايم سيستم يا کارتيزين مختصات نومېږي.



2.1 شکل

د مختصاتو سيستم؛ مستوي په څلورو ناحيو تقسيموي چې هره ناحيه د يوې قايمې زاويې په ذريعه تاکل کېږي او د ساعت ستنې په خلاف پر لومړی، دويمه، دريمه او څلورمه ناحيه ويشل

شوې. په دې څلورو ناحیو کې د مختصاتي نقطو اشارې په عین ترتیب (+و+) ، (+,−) ، (−,−) او (−,+) حالات لري.

دوې (x_1 , y_1) و (x_2 , y_2) نقطې له یوه بل سره مساوي دي که چېرې $x_1 = x_2$ او $y_1 = y_2$ وي.

1 مثال: x او y اعداد داسې وټاکئ چې $(4 , -x)$ او $(8 , y+1)$ نقطې له یوه بل سره مساوي وي.

حل: د تعریف سر سم لرو چې

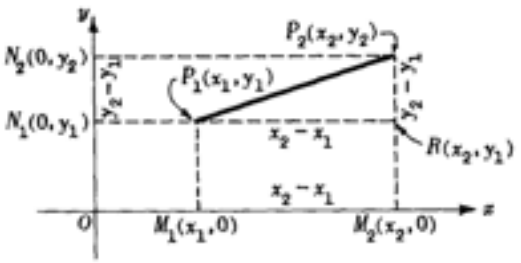
$$(x , -4) = (8, y+1) \Rightarrow x = 8,\ y+1 = -4 \Rightarrow x = 8,\ y = -5$$

د دوو نقطو ترمنځ واټن: د مختصاتو قایم سیستم کې د دوو $P_1(x_1 , y_1)$ او $P_2(x_2 , y_2)$ نقطو ترمنځ واټن عبارت دی له:

$$\boxed{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

ثبوت: P_1 و P_2 نقطې د قایم الزاویه مثلث دوه راسونه جوړوي چې قایم راس یې $R(x_2, y_1)$ دی، د فیثاغورث قضیې پر اساس لرو چې

$$\left(\overline{P_1P_2}\right)^2 = \left(\overline{P_1R}\right)^2 + \left(\overline{RP_2}\right)^2$$



2.2 شکل

له (2.2 شکل) څخه ښکاري چې $\overline{P_1R} = x_2 - x_1$ او $\overline{RP_2} = y_2 - y_1$ دی، نو غوښتل شوی واټن $\overline{P_1P_2} = d$ په لاندې توګه ترلاسه کیږي:

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

په دې اساس • $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

2 مثال: د دوو $(1- , 5)$ و $(8 , 3)$ نقطو ترمنځ واټن ترلاسه کوو.

حل: د $(x_1 , y_1) = (5 , -1)$ او $(x_2 , y_2) = (8 , 3)$ لپاره لرو چې

$$d = \sqrt{(8-5)^2 + [3-(-1)]^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

3 مثال: د دایرې شعاع وټاکئ چې مرکز یې $(4 , 5)$ نقطه او د محیط یوه نقطه یې $(3- , 2-)$ وي.

حل: له دې چې د دایرې شعاع د مرکز او محیط ترمنځ واټن دی نو:

$$r = \sqrt{[4-(-2)]^2 + [5-(-3)]^2} = \sqrt{6^2+8^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$$

د يوه قطعه (توټه) خط نيم کول: د $P_1(x_1, y_1)$ او $P_2(x_2, y_2)$ نقطو ترمنځ د پراته قطعه خط نيم کولو مختصات عبارت دي له:

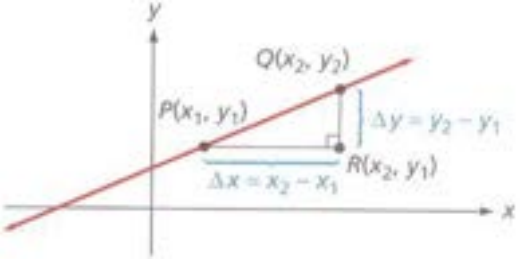
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad , \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

2.2 مستقيم خط

په دې پاراګراف کې د مستقيم خط ميل، د مستقيم خط معادله، د دوو مستقيمونو ترمنځ زاويه او د مستقيمونو موازات او عموديت حالات تر بحث لاندې نيسو.

د مستقيم خط ميل: د x محور د مثبت لور او يوه مستقيم خط ترمنځ زاويې ته په داسې حال کې چې د خط دوران د ساعت ستنې په مخالف لوري، د مستقيم خط انحراف زاويه وايي او د مستقيم خط د انحراف زاويې تانجنت اړونده ميل نومېږي. د هغه مستقيم خط ميل چې له دوو $P(x_1, y_1)$ او $Q(x_2, y_2)$ نقطو څخه تېر شوی وي د (2.3 شکل) په پام کې نيولو سره عبارت دی له:

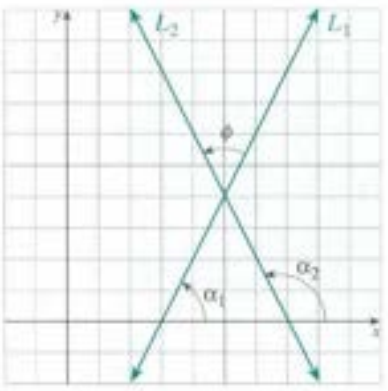
$$m = tg\,\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



2.3 شکل

د دوو مستقيم خطونو ترمنځ زاويه: د دوو L_1 او L_2 مستقيمونو ترمنځ زاويه چې m_1 او m_2 ميلونه لري د (2.4 شکل) سره سم عبارت ده له ϕ څخه داسې چې:

$$tg\,\phi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$$



2.4 شکل

ثبوت: که چېرې α_1 او α_2 په ترتیب د L_1 او L_2 مستقیمونو د انحراف زاویې وي له شکل څخه لیدل کیږي چې $\phi = \alpha_2 - \alpha_1$ د یادو مستقیمونو ترمنځ زاویه ده، د $m_1 = \tan\alpha_1$ او $m_2 = \tan\alpha_2$ په پام کې نیولو سره لرو چې:

- $$tg\,\phi = tg\,(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{tg\,\alpha_2 - tg\,\alpha_1}{1 + tg\,\alpha_2 tg\,\alpha_1} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$$

موازات او عمودیت. که چېرې دوه مستقیم خطونه له یو او بل سره موازي وي نو زاویه یې تر منځ صفر درجې ده. چې

$$tg\,\phi = 0 \Rightarrow \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1} = 0 \Rightarrow m_2 - m_1 = 0 \Rightarrow m_2 = m_1$$

په دې اساس دغه دوه خطونه له یوه بل سره موازي دي که چېرې مساوي میلونه ولري.

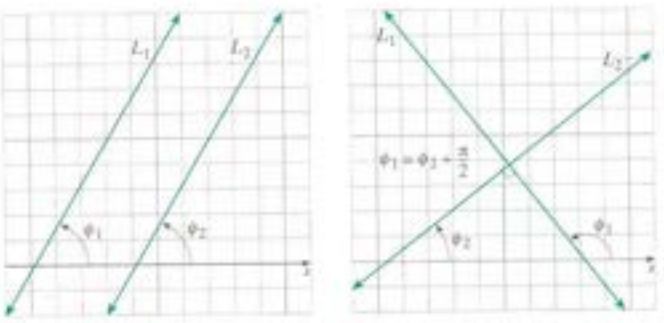
اوس فرضوو چې دوه مستقیمونه په یوه بل عمودي وي په دې صورت کې $\phi = 90^\circ$ ده او $tg\,\phi = \infty$ کیږي، یعنې:

$$\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1} = \infty \Rightarrow 1 + m_2 m_1 = 0 \Rightarrow m_1 m_2 = -1$$

په پای کې ویلی شو چې دوه مستقیمونه په یوه بل هغه مهال عمود وي چې د میلونو حاصل ضرب یې 1- عدد شي.

په دې اساس د دوو L_1 او L_2 مستقیم خطونو (2.5 شکل) د موازات او عمودیت شرطونه چې m_1 او m_2 یې میلونه وي په لاندې توګه فورمول بندي کیږي:

$$\boxed{L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2 \quad , \quad L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow m_2 m_1 = -1}$$



2.5 شکل

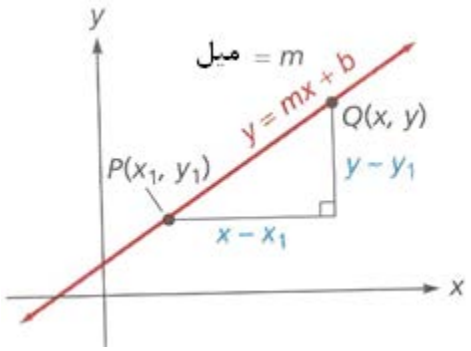
د میل او یوې نقطې لرونکي مستقیم خط معادله: داسې مستقیم خط په پام کې نیسو چې له $P(x_1 , y_1)$ نقطې څخه تېر شوی وي او m میل ولري. که $Q(x , y)$ له $P(x_1 , y_1)$ نقطې څخه پرته د دې خط تاکلې نقطه فرض شي، د مخکینې حکم له مخې پوهیږو چې

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \ , \ x \neq x_1$$

له دې ځایه:

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

وروستۍ معادله د هغه مستقیم خط معادله ده چې له $P(x_1 , y_1)$ نقطې څخه تېر شوی وي او m میل ولري.



شکل2.6

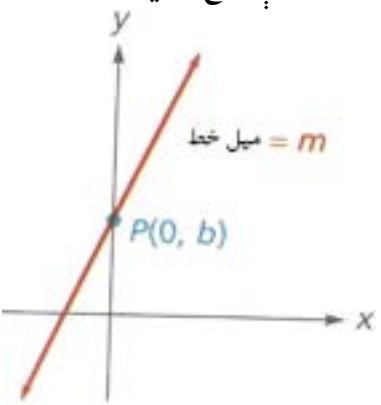
د مستقیم خط د معادلې معیاري حالت: m میل لرونکی مستقیم خط او $(0 , b)$ نقطه په پام کې نیسو، په مخکښنۍ اړیکه کې $x_1 = 0$ او $y_1 = b$ وضع کوو:

$$y - b = m(x - x_1) \Rightarrow y - b = m(x - 0)$$

په دې اساس د یاد مستقیم خط معادله عبارت ده له:

$$\boxed{y = m x + b}$$

په دې اساس د نقطو ستې چې وروستی معادلې ته صدق کوي، عبارت له هغه مستقیم څخه دی چې میل یې m او y محور په $y=b$ کې قطع کوي(2.7 شکل).



2.7 شکل

دوو نقطو ته په کتو د مستقیم خط معادله: داسې مستقیم خط په پام کې نیسو چې له دوو (x_1, y_1) و (x_2, y_2) نقطو څخه تېر شوی وي. که چېرې (x, y) د دې مستقیم خط یوه نقطه وي داسې چې θ د مستقیم خط او محور ترمنځ زاویه فرض شوې وي لرو چې:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\tan\theta=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$\Rightarrow \frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\Rightarrow y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

په دې اساس د هغه مستقیم خط معادله چې له دوو (x_1, y_1) و (x_2, y_2) نقطو څخه تېر شوی وي عبارت ده له:

$$\boxed{y=y_1+\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)}$$

1 **مثال:** د هغه مستقیم خط معادله ترلاسه کړئ چې له (4,3) او (−1,−2) نقطو څخه تېر شوی وي.

حل: هر یوه راکړل شوې نقطه کولی شو لومړی ولیکو، نو له وروستي فورمول څخه استفاده کوو.

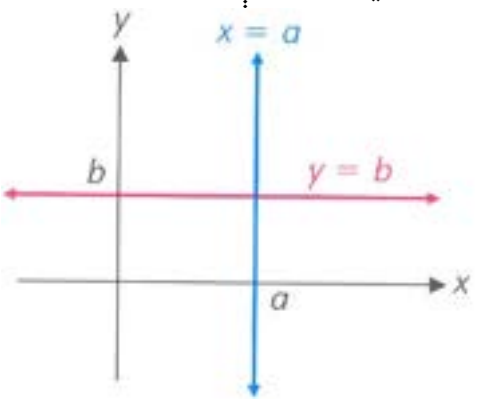
$$y-3=\frac{-2-3}{-1-4}(x-4)\Rightarrow y=x-1.$$

د مستقیم خط د معادلې عمومي حالت: A ، B او C حقیقي اعداد په پام کې نیسو داسې چې $B\neq 0$ وي او $Ax+By=C$ معادله په $y=-\frac{A}{B}x+\frac{C}{B}$ حالت ولیکلې شو. په دې اساس راکړل شوې معادله هغه مستقیم خط راکوي چې میل یې $m=-\frac{A}{B}$ وي او y محور په $b=\frac{C}{B}$ نقطه کې قطع کړي.

افقي او عمودي خطونه: د مستقيم خطونو تر ټولو ساده معادلې په لاندې توګه په پام کې نیسو:

$$\boxed{\begin{aligned} x + 0\times y &= a \\ 0\times x + y &= b \end{aligned}}$$

ښکاري چې دغه دوې معادلې عبارت دي له $x = a$ او $y = b$ څخه، لومړی یې له y محور سره موازي ده(عمودي حالت لري) او میل یې غیر معین دی، داسې حال کې چې دویمه یې له x محور سره موازي ده(افقي حالت لري) او میل یې صفر دی(2.8 شکل).



2.8 شکل

د محورونو د قاطع مستقیم خط معادله: که چېرې مستقیم خط x محور په $x = a$ او y محور په $y = b$ کې قطع کړي، په دې صورت کې د دې خط دوې تاکلې نقطې عبارت دي له $(a\ ,\ 0)$ او $(0\ ,\ b)$ څخه، نو معادله یې په لاندې توګه ترلاسه کیږي.

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \Rightarrow y - 0 = \frac{b - 0}{0 - a}(x - a)$$

$$\Rightarrow y = -\frac{b}{a}(x - a) \ \Rightarrow\ y + \frac{b}{a}x = b \ \Rightarrow \frac{y}{b} + \frac{x}{a} = 1$$

نو د یاد مستقیم خط معادله عبارت ده له:

$$\boxed{\frac{y}{b} + \frac{x}{a} = 1 \ ,\ ab \neq 0}$$

2 **مثال:** د هغه مستقیم معادله ولیکئ چې له x محور سره 45° زاویه جوړوي او له $(1,2)$ نقطې څخه تېر شوی وي.

حل: پوهیږو چې د دې مستقیم میل $m = \tan 45^\circ = 1$ دی نو

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = 1 \Rightarrow \frac{y - 2}{x - 1} = 1 \Rightarrow y - 2 = x - 1 \Rightarrow y = x + 1.$$

3 **مثال:** د هغه مستقيم معادله ترلاسه کړئ چې له (1 , 1) نقطې څخه تېر شوی وي او په $y = 2x - 5$ مستقيم عمود وي.

حل: بنابرين له دې چې غوښتل شوی مستقيم خط په راکړل شوي مستقيم خط عمودی دی نو ميل يې بايد $m = -\frac{1}{2}$ وي.

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m \Rightarrow \frac{y-1}{x-1} = -\frac{1}{2} \Rightarrow y - 1 = -\frac{1}{2}(x-1) \Rightarrow y - 1 = -\frac{1}{2}(x-1)$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

مثال4. د L_1 او L_2 مستقيم خطونو د موازات او عموديت شرطونه مشخص کړئ داسې چې:

$$\begin{cases} L_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ L_2 : A_2x + B_2y + C_1 = 0 \end{cases}$$

حل: تر هرڅه د مخه معادلې په لاندې توګه په پام کې نيسو:

$$\begin{cases} y = -\frac{A_1}{B_1}x - \frac{C_1}{B_1} \\ y = -\frac{A_2}{B_2}x - \frac{C_2}{B_2} \end{cases}$$

د موازاتو شرط $L_1 // L_2 \Rightarrow \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} \Rightarrow A_1B_2 - A_2B_1 = 0$

او

عموديت شرط $L_1 \perp L_2 \Rightarrow \left(-\frac{A_1}{B_1}\right)\left(-\frac{A_2}{B_2}\right) = -1 \Rightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0$

2.3 دايره

د مستوي د نقطو هغه سټ چې له يوې ټاکلې نقطې څخه مساوي واټن ولري، هغه دايره ده چې يادې نقطې مرکز او اړونده واټن يې شعاع وي.

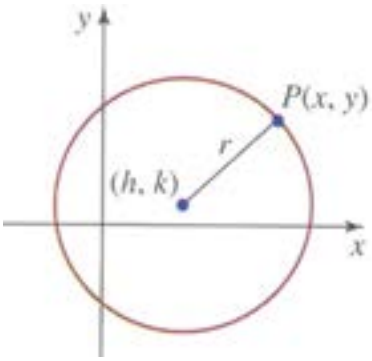
د دايرې معادله: د دايرې (x, y) اختياري نقطه په پام کې نيسو چې مرکز يې (h , k) نقطه او شعاع يې r وي. د (x , y) او (h, k) نقطو ترمنځ واټن يعنې r عبارت دی له:

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$$

له دې ځايه لرو چې:

$$\boxed{(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \quad \cdots \quad (1)}$$

(1) مساوات کې د (h, k) مرکز او r شعاع لرونکې دايرې معادله ده(2.9 شکل).



2.9 شکل

که د دایرې مرکز د مختصاتو په مبدا یعنې $(0\ ,0)$ نقطه کې وي، په دې صورت کې $h=0=k$ کیږي او د دایرې معادله لاندې شکل غوره کوي:

$$\boxed{x^2+y^2=r^2}$$

1 **مثال:** د یوې دایرې معادله وليکئ چې مرکز یې $(3\ ,-2)$ او شعاع یې $r=5$ وي.

حل: د فورمول له مخې لرو چې

$$\left[x-(-2)\right]^2+(y-3)^2=5^2\Rightarrow(x+2)^2+(y-3)^2=25$$

$$\Rightarrow x^2+4x+4+y^2-6y+9=25\Rightarrow x^2+y^2+4x-6y-12=0$$

د دایرې د معادلې عمومي حالت: د هغه دایرې چې r شعاع او $(h\ ,k)$ مرکز لري عمومي معادله لیکو:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

یا:

$$x^2+y^2-2hx-2ky+(h^2+k^2-r^2)=0$$

په دې اساس د دایرې معادله په عمومي توګه لاندې شکل لري:

$$\boxed{x^2+y^2+ax+by+c=0}$$

د معادلې له دې حالت څخه کولی شو د دایرې مرکز او شعاع وټاکو:

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

د پاسینۍ معادلې له تکمیل مربع کولو څخه لرو چې:

$$\left(x^2+ax+\frac{a^2}{4}\right)-\frac{a^2}{4}+\left(y^2+by+\frac{b^2}{4}\right)-\frac{b^2}{4}+c=0$$

په دې اساس:

$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c$$

یا:

$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}\right)^2$$

نو معادله د $\left(-\frac{a}{2}\ ,\ -\frac{b}{2}\right)$ مرکز او $r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$ شعاع لرونکې دایره ښیي، مشروط په دې چې $a^2+b^2-4c>0$ وي، کله چې $a^2+b^2-4c=0$ وي دایره نقطوي ده او کـه چیـرې $a^2+b^2-4c<0$ وي دایره موهومي ګڼل کیږي. په عمومي توګه د دایرې معادله په لاندې بڼه هم ښودل کیږي:

$$\boxed{Ax^2+By^2+Dx+Ey+F=0\quad,\quad A=B\neq 0}$$

مثال2. د $x^2+y^2-4x+8y-5=0$ شعاع او مرکز وټاکئ.

حل: معادله په اړونده معیاري شکل یې اړوو:

$$\left(x^2-4x+4\right)-4+\left(y^2+8x+16\right)-16-5=0$$

$$(x-2)^2+(y+4)^2=25$$

په دې اساس د دایرې شعاع $r=5$ او مرکز یې $(-4\ ,\ 2)$ نقطه ده.

3 **مثال:** $4x^2+4y^2-8x+24y+4=0$ تشخیص کوو.

حل: که معادله په 4 تقسیم کړو نو ترلاسه کوو چې:

$$x^2+y^2-2x+6x+1=0$$

$$\Rightarrow\left(x^2-2x+1\right)-1+\left(y^2+6x+9\right)-9=0$$

$$\Rightarrow(x-1)^2+(y+3)^2=9$$

د دایرې شعاع $r=3$ او مرکز یې $(-3\ ,\ 1)$ نقطه ده.

4 **مثال:** $x^2+y^2+2x-4y+5=0$ دایره تشخیص کړئ.

حل: راکړل شوې معادله په لاندې توګه لیکلی شو:

$$\left(x^2+2x+1\right)-1+\left(y^2-4y+4\right)-4+5=0$$

$$\Rightarrow(x+1)^2+(y-2)^2=0$$

د دایرې شعاع r = 0 ده، په دې اساس د راکړل شوې معادلې پورې یوازې یوه $(-1,2)$ نقطه اړوند ده.

5 **مثال:** د $x^2+y^2-6x+4y+14=0$ معادلې منحني تشخیص کړئ.

حل: دغه معادله له تکمیل مربع څخه وروسته لاندې شکل غوره کوي:

$$(x-3)^2+(y+2)^2=-1$$

د $(x\ ,\ y)$ نقطو سیټ چې دغه معادله پکې صدق کوي؛ خالی دی، په دې صورت کې ویل کیږي چې معادله یوه موهومي دایره ښیي.

په قطري حالت کې د دايرې معادله: که چېرې $A(x_1, y_1)$ او $B(x_2, y_2)$ د دايرې د قطرونو دوه انجامونه وي (2.10 شکل). له دې چې $\angle APB = 90^\circ$ ده، په دې اساس د AP مستقيم خط ميل عبارت دی له:

$$m_1 = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

او د BP مستقيم خط ميل عبارت دی له:

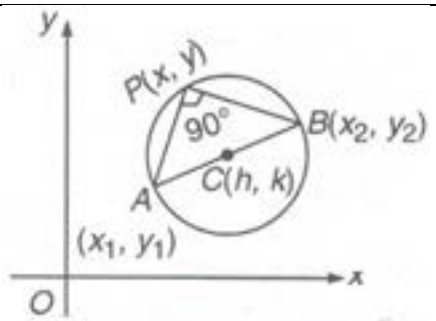
$$m_2 = \frac{y - y_2}{x - x_2}$$

نو دا مستقيم خطونه پر يوه بل عمود هم دي، په دې اساس د ميلونو حاصل ضرب يې عبارت دی له:

$$m_1 m_2 = -1 \Rightarrow \left(\frac{y - y_1}{x - x_1}\right)\left(\frac{y - y_2}{x - x_2}\right) = -1$$

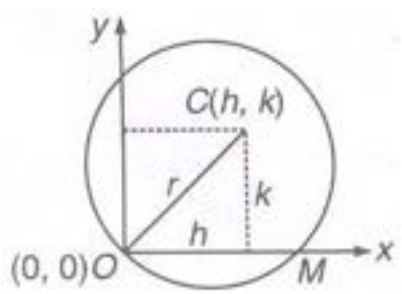
له اړين اختصاراتو وروسته د يادې دايرې معادله داسې ترلاسه کيږي.

$$\boxed{(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0}$$



2.10 شکل

6 **مثال:** د دايرې معادله وليکئ چې مرکز يې په (h, k) نقطه کې وي او له $(0, 0)$ نقطې څخه تېره شوې وي (2.11 شکل)



2.11 شکل

حل: د $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ دايرې معادله له $(0, 0)$ څخه تيريږي، نو:

$$(0 - h)^2 + (0 - k)^2 = r^2$$

يعنې:

$$h^2 + k^2 = r^2$$

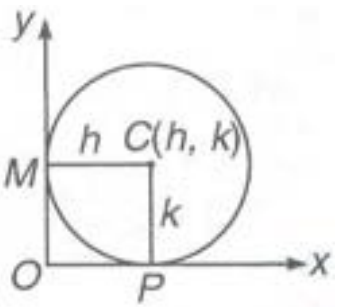
په دې اساس: $(x-h)^2+(y-k)^2=h^2+k^2$

یا: $x^2-2xh+h^2+y^2-2yk+k^2=h^2+k^2$

په دې اساس غوښتل شوې معادله عبارت ده له:

$$x^2+y^2-2hx-2ky=0$$

7 **مثال:** د دایرې معادله ولیکئ چې مرکز یې (h,k) او د x او y محورونو سره مماس وي(2.12 شکل)



2.12 شکل

حل: له دې چې $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ دایره له x و y محورونو سره مماس ده، نو $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ شرط پکې صدق کوي، یعنې

$$(x-\alpha)^2+(y-\alpha)^2=\alpha^2$$

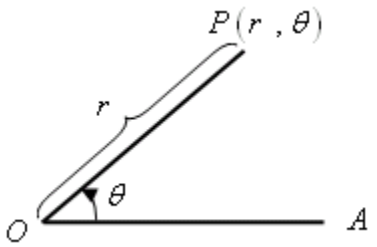
یا: $x^2-2\alpha x+\alpha^2+y^2-2\alpha y+\alpha^2=\alpha^2$

په دې اساس غوښتل شوې معادله عبارت ده له:

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\alpha y+\alpha^2=0$$

2.4 قطبي مختصات

د O ټاکلې نقطه له $\overrightarrow{OA}$ جهت لرونکي مستقیم سره په پام کې نیسو، اختیاري P نقطې کېدای شي د r او θ مختصاتو په ذریعه وښودل شي داسې چې r یې یو مثبت عدد وي او مقدار یې د O او P نقطو ترمنځ واټن وي، خو θ د $\angle POA$ زاویې څخه عبارت ده او که چېرې OA د ساعت د عقربې په مخالف لور دوران ومومي نو د یادې زاویې مثبت لوری ګڼل کیږي. دلته O نقطه د قطب او OA مستقیم د قطبي محور په نامه یادیږي نو له قطب او قطبي محور څخه جوړ شوی سیستم چې د مستوي نقاط پکې د (r,θ) مختصاتو په ذریعه ټاکل کیږي د قطبي مختصاتو په نامه یادیږي(2.13 شکل).

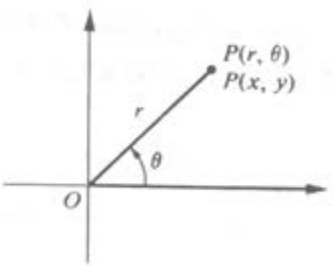


2.13 شکل

که چېرې r او θ په يوه بله سره ونښلول شي، اړونده هندسي محل يې يو ټاکلی منحني ارايه کوي.

د قايم او قطبي مختصاتو ترمنځ اړيکې: که چېرې قايم او قطبي سيستمونه داسې فرض کړو چې د قطبي مختصاتو د قطب نقطه د قايم مختصاتو پر مبنا او مثبت قطبي محور په x افقي محور منطبق وي(2.14 شکل). که چېرې په يوه مستوي کې (r,θ) د يوې نقطې قطبي مختصات او (x,y) يې قايم مختصات فرض شوي وي، له شکل څخه ښکاري چې:

$$x = r\cos\theta \ , \ y = r\sin\theta$$
$$x^2 + y^2 = r^2 \ , \ \tan\theta = \tfrac{y}{x}$$



2.14 شکل

په دې اساس په پاسينيو سيستمونو کې د مستوي د نقطو مختصات کولی شو د پاسينيو جوړه معادله په ذريعه له يوه څخه و بل ته واړوو، په دې اساس د قايم او قطبي سيستمونو منحني ګانې هم د پاسينيو روابطو په مرسته په يوه او بل اړول کيږي.

1مثال: د $P(2\sqrt{3},2)$ قطبي مختصات ترلاسه کړئ.

حل:

$$r = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{12+4} = \sqrt{16} = 4$$
$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{2}{2\sqrt{3}} \Rightarrow \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}.$$

په دې اساس د p نقطې قطبي مختصات عبارت دي له $\left(4 \ , \ \frac{\pi}{6}\right)$ څخه.

په قطبي مختصاتو کې د مستقيم خط معادله: د $y = ax + b$ مستقيم خط معادله په قطبي مختصاتو کې ليکو:

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$$
$$\Rightarrow r\sin\theta = ar\cos\theta + b$$

نو غوښتل شوې معادله عبارت ده له: $\frac{b}{r} = \sin\theta - a\cos\theta$

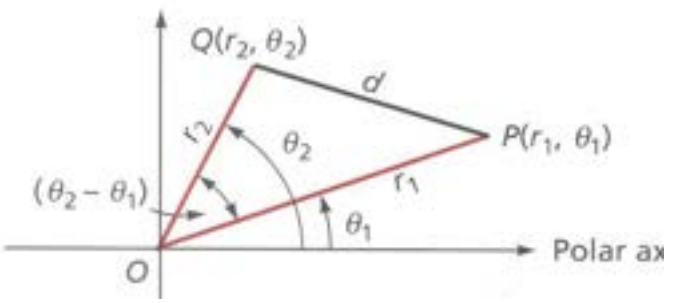
په قطبي مختصاتو کې د دوو نقطو ترمنځ واټن: که چېرې $P(r_1, \theta_1)$ او $Q(r_2, \theta_2)$ نقطې په قايم مختصاتو کې په ترتيب (x_2, y_2) او (x_2, y_2) نقطې ولري(2.15 شکل)، د دې په پام کې نيولو سره چې:

$$x_1 = r_1\cos\theta_1, x_2 = r_2\cos\theta_2, y_1 = r_1\sin\theta_1, y_2 = r_2\sin\theta_2$$

د P_1 او P_2 نقطو ترمنځ واټن عبارت دی له:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)}$$

$$\boxed{d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)}}$$



2.15 شکل

2 مثال: د دوو $(6, 15^\circ)$ او $(8, 75^\circ)$ نقطو ترمنځ واټن وشمېرئ.

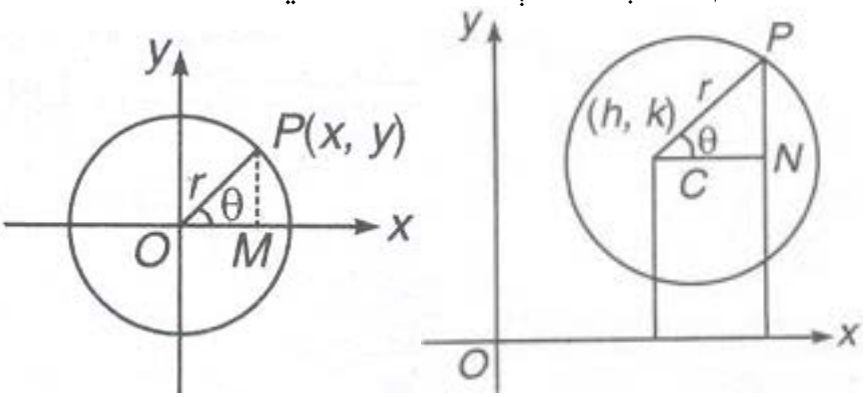
حل:

$$d = \sqrt{6^2 + 8^2 - 2\cdot 6\cdot 8\cdot\cos(75^\circ - 15^\circ)} \Rightarrow d = \sqrt{36 + 64 - 96\cos(60^\circ)}$$
$$= \sqrt{100 - 96\cdot\frac{1}{2}} = \sqrt{100 - 48} = \sqrt{52} \Rightarrow d = \sqrt{52}$$

د مختصاتو په قطبي سيستم کې د دايرې معادله: که $P(x, y)$ د $x^2 + x^2 = r^2$ معادلې اختياري نقطه وي، د $\angle MOP = \theta$ لپاره، x او y متحولين د r او θ له جنسه ښيو:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \quad \cdots \quad (2)$$

(2) معادلاتو سيستم د دايرې د معادلې پارامتريک يا قطبي حالت دی.



2.16 شکل

که د دايرې مرکز په (h,k) نقطه کې وي (2.16 شکل) نو اړيکه يې عبارت ده له:

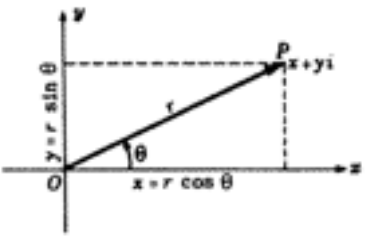
$$\begin{cases} x = h + r\cos\theta \\ y = k + r\sin\theta \end{cases} \quad \cdots \quad (3)$$

2.5 د مختلط اعدادو قطبي بڼودنه

د $z = x + yi$ مختلط عدد کېدای شي په مستوي کې د $P(x,y)$ نقطې په توګه نظر قايم مختصاتي سيستم ته په پام کې ونيول شي (2.17 شکل) داسې چې افقي محور يې د حقيقي اعدادو محور او عمودي محور يې د موهومي اعدادو محور نومول کيږي او په دې اساس هر مختلط عدد ته يوه نقطه د مستوي پرمخ او د مستوي هر نقطې ته يو مختلط عدد تقابل کوي. θ زاويه چې $\overline{OP}$ يې د x محور له مثبت جهت سره جوړوي د مختلط عدد شاخص او طول بعد (مقدار) نومويي. له شکل څخه ښکاري چې:

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array}\right\} \quad , \quad \left\{\begin{array}{l} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan\frac{y}{x} \end{array}\right.$$

په دې ترتيب $r = |z|$ ده او د θ تاکلو لپاره، د x او y اشارې بايد په پام کې ونيول شي:



2.17 شکل

په دې اساس که x او y له r او θ سره تعویض شي نو لرو چې:

$$z = x + yi = r\cos\theta + (r\sin\theta)i$$

يعنې: $$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

دغه حالت د z عدد مثلثاتي بڼودنه(قطبي بڼودنه) يادیږي.

1 مثال: $z = 2 + 2i$ عدد په قطبي حالت ليکو.

حل: بنکاره ده چې $x = 2$ او $y = 2$ دی، په دې اساس ليکو

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} \Rightarrow r = 2\sqrt{2}$$

له دې چې z په لومړۍ ناحيه کې واقع دی ، نو θ يوه حاده زاويه ده او

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \tan\theta = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow \theta = \arctan 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$z = 2 + 2i = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

2 مثال: د $z = 3 + \sqrt{3}i$ قطبي حالت وليکئ.

حل:

$$r = \sqrt{3^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{12} = \sqrt{4\cdot 3} \Rightarrow r = 2\sqrt{3}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \theta = \arctan\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

په پايله کې: $$z = 3 + \sqrt{3}i = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

د قطبي مختلط اعدادو ضرب: په مثلثاتي حالت کې د مختلط اعدادو ضرب، د مثلثاتي توابعو په پام کې نيولو سره آسانه ترسره کيږي. دوه $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ او $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ قطبي مختلط عددونه په ساده توګه ضربوو:

$$z_1 z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$
$$= r_1 r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + (\sin\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_2\cos\theta_1)i]$$

په دې اساس: $z_1 z_2 = r_1 r_2\left[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\right] \quad \cdots \quad (i)$

وروستۍ اړیکه کولی شو د n مختلط عدد لپاره تعمیم کړو او باید ووایو چې له دې رابطې څخه د مختلط اعدادو توانونه په ښه توګه شمېرل کیږي.

د $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ عدد لپاره لرو چې

$$z^2 = zz = rr\left[\cos(\theta+\theta)+i\sin(\theta+\theta)\right]$$

یعنې: $z^2 = r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$

په همدې توګه: $z^3 = r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)$

په پایله کې د هر n طبیعي عدد لپاره کولی شو وليکو

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \quad \cdots \quad (ii).$$

د دې موور فورمول: که چېرې $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ مختلط عدد په پام کې ونیسو نو لرو چې:

$$z^n = r^n\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^n \quad \ldots \quad (I)$$

له بل پلوه پوهیږو چې: $z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \quad \ldots \quad (II)$

د (I) او (II) اړیکو له پرتله کولو څخه لرو چې:

$$\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta}$$

دغه اړیکه د دي موور فورمول په نامه یادیږي.

3 مثال: د قطبي ضرب په کارولو سره $(1+i)^{12}$ عدد وشمېرئ.

حل: تر هر څه د مخه $z = 1+i$ عدد په قطبي توګه ښیو:

$$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \quad , \quad \theta = \arctan\frac{1}{1} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

نو: $1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

په دې اساس

$$(1+i)^{12} = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{12} = \left(\sqrt{2}\right)^{12}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{12}$$

$$= 2^6\left(\cos\frac{12\pi}{4}+i\sin\frac{12\pi}{4}\right) = 64\left(\cos 3\pi + i\sin 3\pi\right)$$

$$= 64\left[\cos(2\pi+\pi)+i\sin(2\pi+\pi)\right] = 64\left(\cos\pi + i\sin\pi\right)$$

$$= 64(-1+i\cdot 0) = -64$$

په پایله کې: $(1+i)^{12} = -64$

د قطبي مختلط اعدادو تقسيم:

$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ عدد په $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ تقسيمو:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)} = \frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}{(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2)}{\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2}$$

$$\Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

مثال: 4 د قطبي حالت په کارولو سره $\left(\frac{-1+i}{1+i}\right)^{12}$ افاده وشمېرئ.

حل:

$$-1+i \ : \ r = \sqrt{2}\ ,\ \tan\theta = \frac{1}{-1} \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow -1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$1+i: \ r = \sqrt{2}\ ,\ \tan\theta = \frac{1}{1} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow 1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{-1+i}{1+i} = \frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)} = \cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$$

په دې اساس

$$\left(\frac{-1+i}{1+i}\right)^{12} = \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)^{12} = \cos\left(\frac{12\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{12\pi}{2}\right)$$

$$= \cos(6\pi) + i\sin(6\pi) = \cos 0 + i\sin 0 = 1$$

د مختلط اعدادو جذرونه: ω عدد د z مختلط عدد n - ام جذر ګڼل کيږي، که چېرې $\omega^n = z$ وي، په دې صورت کې ليکو $\omega = z^{\frac{1}{n}}$ ، فرضوو چې $\omega = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ د $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ عدد n - ام جذر دی، پوهيږو چې:

$$\omega^n = z \Rightarrow [\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi]^n = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\Rightarrow \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n\varphi = \theta + 2k\pi \Rightarrow \varphi = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n} \\ \rho^n = r \ \Rightarrow \ \rho = \sqrt[n]{r} \end{cases}$$

په پايله کې

$$\omega_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right),\quad k=0,1,2,\ldots,n-1$$

د k بېلابېلو قيمتونو لپاره په حقيقت کې د z مختلط عدد n جذرونه چې هر يو يې $\sqrt[n]{r}$ شعاع وې، خو بيلابيلې زاويې لري داسې تاکل کيږي چې د $\rho = \sqrt[n]{r}$ شعاع لرونکې دايرې محيط په n برخو په مساوي توګه تقسيم کړي او ټول جذرونه د همدې دايرې په محيط باندې پراته وي.

5 مثال: د $z=-32$ عدد پنځم جذر ترلاسه کړئ. (د ω مختلط عدد ترلاسه کول داسې چې $\omega^5=-32$ وي).

حل: پوهيږو چې: $-32 = 32(\cos\pi + i\sin\pi)$

په دې اساس د عمومي فورمول په اساس

$$\omega_k = \sqrt[5]{32}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{5} + i.\sin\frac{\pi+2k\pi}{5}\right)$$

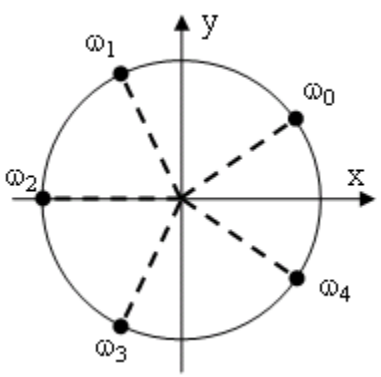
يعنې: $\Rightarrow \omega_k = 2\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{5} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{5}\right),\quad k=0,1,2,3,4$

په دې اساس پنځه مطلوب جذرونه عبارت دي له:

$$\omega_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{5} + i.\sin\frac{\pi}{5}\right),\quad \omega_1 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{5} + i.\sin\frac{3\pi}{5}\right)$$

$$\omega_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{5} + i.\sin\frac{5\pi}{5}\right),\quad \omega_3 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{5} + i.\sin\frac{7\pi}{5}\right)$$

$$\omega_4 = 2\left(\cos\frac{9\pi}{5} + i.\sin\frac{9\pi}{5}\right)$$



2.18 شکل

6 مثال: د $z=1$ عدد دريم جذر ترلاسه کړئ.

حل: ω ترلاسه کوو داسې چې $\omega^3=1$ وي، نو

$$1 = 1 + 0\,i = \cos 0 + i \sin 0$$

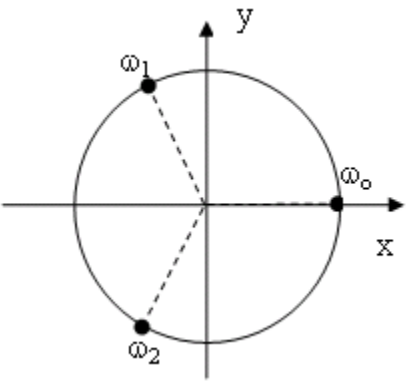
په دې اساس

$$\omega_k = \cos\frac{2k\pi}{3} + i.\sin\frac{2k\pi}{3} \quad , \quad k = 0\,,1\,,2\,,...$$

له دې ځايه

$\omega_0 = \cos 0 + i.\sin 0 = 1$ و ،

$$\omega_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i.\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i.\frac{\sqrt{3}}{2}$$



2.19 شکل

د واحد عدد جذرونه: په عمومي توګه د $(z = 1)$ واحد عدد د n - ام جذر د ترلاسه کولو لپاره ښکاره ده چې:

$$1 = 1(\cos 0 + i \sin 0)$$

په دې اساس $\omega_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\,\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ اړیکه کې د $r = 1$ او $\theta = 0$ په پام کې نیولو سره لاندې شکل غوره کوي:

$$\omega_k = \cos\frac{2k\,\pi}{n} + i\,\sin\frac{2k\,\pi}{n} = \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\,\sin\frac{2\pi}{n}\right)^k$$

$$\omega_k = \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\,\sin\frac{2\pi}{n}\right)^k \quad , \quad k = 0,1,2,3,\,...,n-1$$

اوس که چېرې $\omega_1 = \varepsilon$ وضع کړو، نو غوښتل شوي جذرونه عبارت دي له:

$$\omega_0 = 1\ ,\ \omega_1 = \varepsilon\ ,\ \omega_2 = \varepsilon^2\ ,\ \omega_3 = \varepsilon^3\ ,\ ...\ ,\ \omega_{n-1} = \varepsilon^{n-1}$$

یعنې د ε په ټاکلو سره د 1 عدد جذرونه په لاندې توګه فهرست کیږي:

$$1 \quad , \quad \varepsilon \quad , \quad \varepsilon^2 \quad , \quad \varepsilon^3 \quad , \quad ... \quad \varepsilon^{n-1}$$

2.6 د څېرکي لنډيز

د مختصاتو قايم سيستم –د حقيقي اعدادو د دوو يو پر بل عمود محورونو څخه عبارت دی.
نقطه – د مختصاتو قايم سيستم کې د يو جوړه حقيقي اعدادو $(x\ ,\ y)$ څخه عبارت ده.
د دوو نقطو ترمنځ واټن $(x_1\ ,\ y_1)$ و $(x_2\ ,\ y_2)$: $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
د هغه مستقيم خط ميل چې له دوو $(x_1\ ,\ y_1)$ او $(x_2\ ,\ y_2)$ نقطو څخه تېر شوی وي:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

د دوو مستقيم خطونو ترمنځ زاويه د دوو L_1 او L_2 خطونو ترمنځ زاويه داسې چې m_1 او m_2 يې اړونده ميلونه وي عبارت ده له ϕ څخه داسې چې

$$tg\,\phi=\frac{m_2-m_1}{1+m_2m_1}$$

موازات او عموديت: د دوو L_1 او L_2 مستقيم خطونو چې m_1 او m_2 يې اړونده ميلونه وي د موازات او عموديت شرطونه په لاندې توګه فورمول بندي کيږي.

$$L_1\parallel L_2\Leftrightarrow m_1=m_2\quad ,\quad L_1\perp L_2\Leftrightarrow m_2m_1=-1$$

د ميل او يوې نقطې لرونکي مستقيم خط معادله: د هغه مستقيم خط معادله چې له $(x_1\ ,\ y_1)$ نقطې څخه تېر شوی وي او ميل يې m وي عبارت ده له

$$y-y_1=m\,(x-x_1)$$

د مستقيم خط معادلې عمومي حالت: $Ax+By+C=0$
د مستقيم خط معادلې معياري حالت (د m ميل په درلودو سره چې y په $y=b$ کې قطع کړي).

$$y=m\,x+b$$

نظر دوو ټاکلو نقطو ته د مستقيم خط معادله: د هغه مستقيم خط معادله چې له دوو $(x_1\ ,\ y_1)$ او $(x_2\ ,\ y_2)$ نقطو څخه تېر شوی وي عبارت دی له:

$$y=y_1+\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

عمودي او افقي خطونه: $x=a$ معادله په هغه مستقيم خط پورې اړونده ده چې له y محور سره موازي وي او $y=b$ معادله د x محور سره موازي د مستقيم خط معادله ده.
د محورونو د قاطع معادله چې x محور په $x=a$ او y محور په $y=b$ کې قطع کړي

$$\frac{y}{b}+\frac{x}{a}=1\ ,\ ab\neq 0$$

د دايرې معادله د $(h\ ,\ k)$ مرکز او r شعاع په درلودو سره عبارت ده له: $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

د دايـرې معـادلې عمـومي حالـت: $Ax^2+By^2+Dx+Ey+F=0 \quad , \quad A=B\neq 0$

د هغه دايرې معادله چې (x_1, y_1) او (x_2, y_2) يې د قطرونو دوه انجامونه وي عبارت ده له:

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$$

د قطبي مختصاتو سيستم – له يوې ټاکلې نقطې(قطب) او يو ټاکلي جهت(قطبيې) څخه جوړ شوی سيستم دی.

په قطبي مختصاتو کې نقطه – د (r,θ) حقيقي اعدادو يوه جوړه ده چې پکې r له مبدا څخه د نقطې واټن دی او θ د r او قطبي ترمنځ زاويه ده.

د قايم او قطبي مختصاتو ترمنځ اړيکې که چېرې (r,θ) په مستوي کې د يوې اختياري نقطې قطبي مختصات او (x,y) يې قايم مختصات وي، د دوی ترمنځ اړيکې عبارت دي له:

$$x=r\cos\theta \ , \ y=r\sin\theta \Leftrightarrow x^2+y^2=r^2 \ , \ \tan\theta=\tfrac{y}{x}$$

په قطبي مختصاتو کې د مستقيم خط معادله : $\dfrac{b}{r}=\sin\theta-a\cos\theta$

پـه قطبـي مختصـاتو کـې د دوو نقطـو تـرمنځ واټـن: پـه قطبـي سيسـتم کـې د دوو (r_1, θ_1) او (r_2 , θ_2) نقطو ترمنځ واټن عبارت دی له:

$$d=\sqrt{r_1^{\,2}+r_2^{\,2}-2r_1r_2\cos(\theta_2-\theta_1)}$$

د مختصاتو په قطبي سيستم کې د دايرې معادله $x=r\cos\theta \ , \ y=r\sin\theta$

د مختلط اعدادو قطبي ارائه $z=x+yi \Leftrightarrow z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

د اعدادو ضرب $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$ او $z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ په قطبي حالت کې ضربوو:

$$z_1z_2=r_1r_2\left[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_3)\right]$$

د قطبي مختلط عدد توانونه $z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$

د دي موور فورمول: $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$

د اعدادو تقسيم $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$ او $z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ په قطبي حالت کې تقسيموو

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\right].$$

د قطبي مختلط اعدادو جذرونه: که چېرې $\omega^n=z$ وي، په دې صورت کې $\omega=z^{\frac{1}{n}}$ د z مختلط عدد n-ام جذر دی

$$\omega_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\ ,\ k=0,1,2,\ldots,n-1$$

د واحد عدد جذرونه. که د $z=1$ عدد n-ام جذر ټاکلو لپاره، $\omega_1=\varepsilon$ وضع شي نو لرو چې:

$$\omega_0=1\ ,\ \omega_1=\varepsilon\ ,\ \omega_2=\varepsilon^2\ ,\ \omega_3=\varepsilon^3\ ,\ \ldots\ ,\ \omega_{n-1}=\varepsilon^{n-1}$$

يعني د ε ، په ټاکلو سره د 1 عدد جذرونه عبارت دي له:

$$1\ ,\ \varepsilon\ ,\ \varepsilon^2\ ,\ \varepsilon^3\ ,\ \ldots\ \varepsilon^{n-1}$$

2.7 تمرين

1. د لاندې نقطو ځای قایم مختصاتو ته په کتو وټاکئ.

$$A(-2,3)\ ,\ B(-5,-4)\ ,\ C(2,3)\ ,\ D(0,5)\ ,\ E(-4,0)$$

2. x او y داسې وټاکئ چې $(x\ ,1)=(3\ ,y-2)$ وي.
3. د لاندې جوړه نقطو ترمنځ واټن وټاکئ.

$$i.\ \ P_1(5,5)\ ,\ P_2(5,-5)\ \ ,\ \ ii.\ \ P_1\left(\sqrt{3},0\right), P_2\left(0,\sqrt{6}\right)$$

4. وښیئ چې (0,1) ، (1,3) او (2,5) نقطې د یوه مستقیم پرمخ پرتې دي.
5. لاندې مستقیم خطونه رسم کړئ.

$$i.\ \ y=x+5\ \ ,\ \ ii.\ \ y+2x-5=0\ \ ,\ \ iii.\ \ x+6=0$$

$$iv.\ \ 3y=6x-12\ \ ,\ \ v.\ \ y=4\ \ ,\ \ vi.\ \ x+y=8$$

6. د هغه مستقیم خطونو میل وټاکئ چې د لاندو جوړه نقطو څخه جوړ شوي وي.

$$i.\ \ (0,0),(2,2)\ \ ,\ \ ii.\ \ (2,3),(3,2)\ \ ,\ \ iii.\ \ (-2.5),(2,-3)$$

7. د هغه مستقیم خطونو معادلې وټاکئ چې میل او یوه نقطه یې په لاندې توګه راکړل شوي وي.

$$i.\ \ P(0\ ,\ 3), m=-1\ \ ,\ \ ii.\ \ P(-4\ ,-1), m=2$$

$$iii.\ \ P(3,6), m=0\ \ ,\ \ iv.\ \ P(4,2), m=\infty$$

8. په لاندې هر یوه خط کې میل او د x او y محورونو سره یې تقاطع وټاکئ.

$$i.\ \ y=4x-5\ \ ,\ \ ii.\ \ y=-x\ \ ,\ \ iii.\ \ 2x-y+5=0$$

9. د هغه مستقیم معادله ولیکئ چې x محور په $x=3$ او y محور په $y=2$ کې قطع کړي.
10. د لاندې هر جوړه خطونو ترمنځ زاویې وټاکئ.

$$i.\ \begin{cases}4x+2y=7\\ y=\frac{1}{2}x-5\end{cases}\ ,\ \ ii.\ \begin{cases}x+y-7=0\\ x+y-4=0\end{cases}$$

11. د هغه مستقیم معادله ولیکئ چې له (2 ,0) نقطې څخه تېر شوی وي او په $x+y-3=0$ مستقیم عمودي وي.

12. په $4x-3ky+1=0$ معادله کې k پارامتر داسې وټاکئ چې دغه مستقیم له $(1\ ,\ 5)$ نقطې څخه تېر شي.

13. لاندې مستقیم خطونه رسم کړئ.

$$i.\ \begin{cases}3x-2y=2\\2x+y=8\end{cases}\quad ,\quad ii.\ \begin{cases}4x-2y=7\\-2x+y=3\end{cases}$$

14. د $(2,-2)$ ، $(-3\ ,\ 3)$ ، $(5\ ,\ 5)$ نقطو قطبي مختصات وټاکئ.

15. د $(2,\frac{\pi}{2})$ ، $(3\ ,\ \frac{3\pi}{2})$ ، $(7\ ,\ \frac{\pi}{3})$ نقطو قایم مختصات وټاکئ.

16. د هغه دایرو معادلې وليکئ چې لاندې يې مرکزونه او شعاع وې راکړل شوي دي.

$$i.\ C(2,3)\ ,\ r=4\quad ,\quad ii.\ C(-2,3)\ ,\ r=8$$
$$iii.\ C(0,3)\ ,\ r=4\quad ,\quad iv.\ C(-2,0)\ ,\ r=8$$

17. د دایرې معادله وليکئ چې مرکز يې د $x=4$ او $y=-3$ مستقیم خطونو د تقاطع په نقطه کې وي او له $(0\ ,\ 0)$ نقطې څخه تېره شوې وي.

18. د معادلې دایره وليکئ چې مرکز يې $(h\ ,\ k)$ او د x مماس هم وي.

19. د دایرې معادله وليکئ چې مرکز يې $(h\ ,\ k)$ وي او په عین حال کې د y محور سره مماس هم وي.

20. د دایرې معادله وليکئ چې مرکز يې $(h\ ,\ 0)$ نقطه وي او له مبدا څخه تېره شوې وي.

21. د معادلې دایره وليکي چې مرکز يې $(0\ ,\ h)$ نقطه وي او له مبدا څخه تېره شوې وي.

22. $2\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2-\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2$ مختلط افاده د مثلثاتي ښودنې په کارولو سره وشمېرئ.

لاندې قطبي مختلط اعداد په $z=x+yi$ توګه وليکئ.

23. $z=5(\cos\pi+i\sin\pi)$, 24. $z=3\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

25. $z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, 26. $z=6\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

لاندې جذرونه وشمېرئ.

27. $(1+i)^{\frac{1}{2}}$, 28. $\left(2\sqrt{3}+2i\right)^{\frac{1}{2}}$, 29. $\sqrt[3]{i}$, 30. $\sqrt{1-i}$

دريم څپرکی
متريکس او ديترمينانت

متريکس او ديترمينانت د رياضي مهم مبحث دی چې په ذريعه يې د رياضي او طبيعي علومو مسايل حل کيږي. د متريکس په کارولو سره يوه ډله اعداد په يوه وخت او سيستماتيک ډول په شمېرنو کې شاملیږي. د متريکس او ديترمينانت پواسطه د شمېرنو دستورونه ډېر مؤثر او منطقي ترسره کيږي. که څه هم متريکس په خطي جبر کې په دقيق او فني توګه مطرح کيږي، خو دلته د دې برخې ځينې لومړني مفاهيم او دساتير په لنډ ډول را اخيستل شوي دي.

3.1 د متريکس لومړني مفاهيم

د متريکس تعريف: متريکس د يوه ټاکلي جدول په ستونونو او سطرونو کې د يو شمېر کميتونو له تنظيم څخه عبارت دی. هر متريکس چې m سطر او n ستون ولري په $A_{m\times n}$ سمبول ښودل کيږي او هغه $m\times n$ بعدي متريک نومولي. a_{ij} عنصر د i سطر او j ستون پورې اړوند دی، $m\times n$ د متريکس بعد يا مرتبه نوميږي.

1 مثال: 3×4 بعدي متريکس لاندې شکل لري:

$$A_{3x4}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\end{pmatrix}.$$

مربعي متريک: هغه متريکس چې د سطرونو او ستونونو شمېر يې له يوه بل سره مساوي وي، د مربعي متريکس په نامه يادېږي. لاندې متريکس 3×3 مربعي متريکس دی:

$$A_{3\times 3}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$$

په دې مربعي متريکس کې a_{11} ، a_{22} او a_{33} عناصر د اصلي قطرونو په نامه يادېږي.

صفري متريکس: عبارت له هغه متريکس څخه دی چې ټول عناصر يې صفرونه وي او هغه په 0_{mxn} ښيي.

سطري او ستوني متريکسونه: په سطري متريکس کې، عناصر يوازې د يوه سطر پر مخ ځای لري خو د ستوني متريکسونو عناصر په يوه ستون کې واقع دي.

2 مثال: $A_{14}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\end{pmatrix}$ متريکس يو سطري متريکس دی، خو لاندې متريکس، ستوني متريکس دی.

$$A_{31}=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\a_{31}\end{pmatrix}$$

قطري متريکس: هغه مربعي متريکس دی چې ټول غير قطري عناصر يې صفرونه وي.

3 **مثال:** لاندې متريکس قطري دی.

$$A=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&3&0\\0&0&7\end{pmatrix}$$

واحد متريکس: هغه قطري متريکس چې ټول قطري عناصر يې 1 وي، واحد متريکس نومیږي، واحد متريکس په I سمبول ښودل کیږي.

4 **مثال:** $I_{2\times2}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ او $I_{3\times3}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ متريکسونه د واحد متريکسونو په نامه یادیږي.

مثلثي متريکسونه: که چېرې د يوه مربعي متريکس د اصلي قطر ټول پاسيني يا لاندينې عناصر صفرونه وي، هغه د (پاسيني يا لاندينې)مثلثاتي متريکس په نامه یادیږي.

5 **مثال:** A متريکس، لاندينی مثلثي متريکس نومیږي او B پاسيني مثلثي متريکس دی.

$$A=\begin{pmatrix}9&0&0\\4&1&0\\-2&8&5\end{pmatrix}\quad,\quad B=\begin{pmatrix}3&11&-8\\0&2&9\\0&0&10\end{pmatrix}$$

د متريکسونو مساوي والي: دوه متريکسونه له يوه بل سره مساوي دي، که چېرې د سطرونو، ستونونو او مرتب عناصرو شمېر يې له يوه بل سره مساوي وي.

6 **مثال:** د $A=\begin{pmatrix}2x&3y\\4z&8\end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix}10&6\\8&8\end{pmatrix}$ متريکسونو د مساوي والي شرايط عبارت دي له:

$$A=B\Rightarrow\begin{cases}2x=10\Rightarrow x=5\\3y=6\Rightarrow y=2\\4z=8\Rightarrow z=2\end{cases}$$

3.2 د متريکسونو الجبري عمليې

له متريکس سره د عدد ضرب: د λ عدد او A متريکس حاصل ضرب عبارت دی له λA څخه، داسې چې هر عنصر يې د λ عدد او په A متريکس کې د اړونده عنصر له حاصل ضرب څخه ترلاسه کيږي.

1 **مثال:** 5 عدد له $A=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 6 & -8\end{pmatrix}$ متريکس سره ضرب وو:

$$5A=\begin{pmatrix}5.4 & 5.2\\ 5.6 & 5(-8)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20 & 10\\ 30 & -40\end{pmatrix}$$

د متريکسونو جمع او تفريق: د دوو متريکسونو مجموع عبارت له هغه متريکس څخه دی چې هر يو عنصر يې د دواړو متريکسونو د هم مرتبه عناصرو (د عين سطر او عين ستون عناصرو) له حاصل جمع څخه ترلاسه شوی وي. له A څخه د B متريکس حاصل تفريق عبارت دی له $A-B=A+(-1)B$.

2 **مثال:** د دوو متريکسونو د جمع او تفريق بېلګې عبارت دي له:

$$\begin{pmatrix}2 & 3\\ -4 & 5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8 & -3\\ 4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+8 & 3+(-3)\\ -4+4 & 5+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2 & 3\\ -4 & 5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}8 & -3\\ 4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-8 & 3-(-3)\\ -4-4 & 5-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & 6\\ -8 & 4\end{pmatrix}$$

د متريکسونو ضرب: که چېرې د A متريکس ستونونو شمېر د B متريکس ستونونو له شمېر سره مساوي وي، د A او B متريکس حاصل ضرب يعنې $A\times B$ داسې ترلاسه کيږي چې: د A متريکس i-ام سطر د B متريکس د j-ام ستون په مقابل کې واقع کيږي، له $A\times B$ متريکس څخه، C_{ij} عنصر د هغه عناصرو له حاصل ضرب څخه ترلاسه کيږي چې د يوه بل په مقابل کې واقع شوي وو. د $A\times B$ متريکس د سطرونو شمېر د A متريکس له سطرونو سره او د ستونونو شمېر يې د B له ستونونو سره مساوي دی.

3 **مثال:** د دوو متريکسونو د ضرب بېلګې:

$$\begin{pmatrix}2 & 4\\ 5 & 3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-3 & 0 & 1\\ 0 & 6 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12} & c_{13}\\ c_{21} & c_{22} & c_{23}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & 24 & 2\\ -15 & 18 & 5\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}c_{11}=2(-3)+4\cdot 0=-6 \ , \ c_{12}=2\cdot 0+4\cdot 6=24 \ , \ c_{13}=2\cdot 1+4\cdot 0=2\\ c_{21}=5(-3)+3\cdot 0=-15 \ , \ c_{22}=5\cdot 0+3\cdot 6=18 \ , \ c_{23}=5\cdot 1+3\cdot 0=5\end{cases}$$

4 **مثال:** د $A=(a,b,c)$ او $B=\begin{pmatrix}a'\\ b'\\ c'\end{pmatrix}$ متريکسونو حاصل ضرب عبارت دی له:

$$AB=(a,b,c)\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}=(aa'+bb'+cc')$$

5 **مثال:** د $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}a' & b'\\ c' & d'\end{pmatrix}$ متريکسونو حاصل ضرب عبارت دی له:

$$AB=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a' & b'\\ c' & d'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}aa'+bc' & ab'+bd'\\ ca'+dc' & cb'+dd'\end{pmatrix}$$

6 **مثال:** د متريکسونو د ضرب مفهوم په کارولو سره لاندې خطي معادلاتي سيستم

$$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=d_1\\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2\\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3\end{cases}$$

په متريکسي توګه داسې ښودل کيږي:

$$\begin{pmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d_1\\d_2\\d_3\end{pmatrix}$$

7 **مثال:** د متريکسونو په ضرب کې تبادلوي قانون صدق نه کوي ، يعنې په عمومي توګه AB او BA له يوه بل سره مساوي نه دي. د ببلګې په توګه $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ نو لرو چې:

$$AB=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 2 & 0\end{pmatrix}\quad,\quad BA=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 6 & 0\end{pmatrix}$$

3.3 ديترمينانت

د A مربعي متريکس ديترمينانت يعنې $\det A$ د $|A|$ حقيقي عدد څخه عبارت دی چې له يادو متريکس څخه په لاندې توګه ترلاسه کيږي.

لومړی. که $A=(a)$ 1×1 بعد لرونکی متريکس وي، ديترمينانت يې $|A|=a$ عدد دی،

دويم. د 2×2 مرتبه متريکس $A=\begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{pmatrix}$ ديترمينانت عبارت دی له:

$$\det A=|A|=\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1$$

دريم. د $A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ متريکس ديترمينانت د 2×2 ديترمينانت مفهوم په کارولو سره داسې تعريفوو:

$$\det A=|A|=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}-a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \det A=|A|=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3$$

څلورم 4×4 ديترمينانت په ورته توګه د لومړي سطر او 3×3 ديترمينانت په کارولو سره يې داسې ترلاسه کوو، داسې چې متناوب اشاري پکې په پام کې ونيول شي.

لوړ مرتبه ديترمينانتونه د پاسينيو مراحلو سره سم ترلاسه کيږي. ورته طريقه د نورو سطرونو او ستونونو په مرسته د ديترمينانتونو انکشاف لپاره د تطبيق وړ ده. په دې مبحث کې له 3×3 مرتبې څخه لوړ ديترمينانتونه نه مطرح کيږي.

منفرد متريکس: A متريکس ته منفرد وايي که چېرې $|A|=0$ وي، او A ته غير منفرد وايي، په هغه صورت کې چې $|A|\neq 0$ وي. هغه متريکس چې مربعي نه وي منفرد دی.

1 مثال: د $A=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ متريکس ديترمينانت نظر دريم ستون ته يې انکشاف ورکوو.

حل:

$$|A|=\begin{vmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}-0\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}+2\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=2(-5)-0+2(-7)=-10-14=-28$$

2 مثال: د $A=\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ متريکس ديترمينانت شمېرو.

حل:

$$|A|=\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}=\cos\alpha\cos\alpha-(-\sin\alpha)\sin\alpha=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$$

په ساروس طريقه د ديترمينانت انکشاف: د دې لپاره چې د 3×3 ديترمينانت شمېرنه مو په ذهن کې پاتې وي، تر هر څه د مخه د ديترمينانت لومړی او دويم ستونونه په ترتيب سره لوړ ته ليږدوو څو 3×5

جدول ترلاسه شي، وروسته، د دريو متناقص قطرونو (مثبت اشاره لرونکو) او دريو متزايد قطرونو (منفي شاره لرونکو) له مجموع څخه، ياد ديترمينانت په لاندې توګه شمېرل کيږي:

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_1 & c_2 \end{array}$$

$$\Rightarrow |A| = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3$$

3 **مثال:** د لاندې متريکس ديترمينانت وشمېرئ.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{ccccc} 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & -1 & 4 & 6 \\ 5 & 1 & 0 & 5 & 1 \end{array}$$

$$|A| = 2.6.0 + 1(-1)5 + 3.4.1 - 3.6.5 - 2(-1).1 - 2(-1).1 = -81$$

معکوس متريکس: A متريکس د معکوس وړتيا لري، که چېرې B متريکس داسې موجود وي چې:

$$AB = BA = I$$

B متريکس د A متريکس معکوس ګڼل کيږي او په A^{-1} ښودل کيږي. هر متريکس يوازې يو معکوس لري. ښکاره ده چې A د B معکوس دی، او يوازې که B د A معکوس وي. د دې لپاره چې يو متريکس معکوس منونکی وي اړين شرط دا دی چې اړونده ديترمينانت يې صفر وي.

4 **مثال:** $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ متريکسونه د معکوس کېدو وړتيا لري، ځکه چې:

$$AB=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ BA=\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5 **مثال:** د $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ متريکس معکوس عبارت دی له $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ څخه، ځکه چې:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$$

او په دې اساس

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc}\\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{ad-bc}{ad-bc} & \frac{-ab+ab}{ad-bc}\\ \frac{cd-dc}{ad-bc} & \frac{-bc+ad}{ad-bc}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

3.4 د متريکس او ديترمينانت کارونې

د معکوس متريکس په کارولو سره د خطي معادلاتي سيستم حل: خطي معادلاتي سيستم کولی شو د $AX=B$ متريکسي معادلې په توګه په پام کې ونيسو، داسې چې A د ښی لورد ضريبونو متريکس، B د ښی لورد ثابت ضريبونو ستوني متريکس او X د مجهول اعدادو متريکس وي. د A^{-1} متريکس په پام کې نيولو سره سيستم په لاندې توګه حل کيږي:

$$\boxed{AX=B\Rightarrow A^{-1}AX=A^{-1}B\Rightarrow X=A^{-1}B}$$

ليدل کيږي چې د سيستم حل د معکوس متريکس حل ته ارجاع کيږي او دلته دغه طريقه يوازې د دوه مجهوله معادلاتي سيستم لپاره تطبيق کوو.

د دوه مجهوله خطي معادلاتي سيستم حل: د $\begin{cases}ax+b=e\\ cx+d=f\end{cases}$ معادلو سيستم په پام کې نيسو د دې سيستم متريکسي حالت عبارت دی له:

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e\\ f\end{pmatrix}$$

د $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ لپاره سيستم لاندې شکل غوره کوي:

$$A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e\\ f\end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}e\\ f\end{pmatrix}\Rightarrow I\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}e\\ f\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}e\\ f\end{pmatrix}\Rightarrow \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e\\ f\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}de-bf\\ -ce+af\end{pmatrix}\Rightarrow \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{de-bf}{ad-bc}\\ \frac{-ce+af}{ad-bc}\end{pmatrix}$$

په دې اساس

$$x=\frac{de-bf}{ad-bc}\quad,\quad y=\frac{af-ce}{ad-bc}\quad,\quad ad-bc\neq 0$$

په کرامر طريقه د خطي معادلاتي سيستم **حل:** د هغه خطي معادلاتي سيستم د حل لپاره چې n معادلې او n مجهول ولري، تر هرڅه د مخه Δ ديترمينانت د مجهول اعدادو ضرايبو (اصلي

ديترمينانت) لپاره شمېرل کيږي، وروسته بيا n فرعي ديترمينانتونه په لاندې توګه ټاکل او شمېرل کيږي، د x_k اړوند ستون ضريبونه $(k=1,2,3,....,n)$ د سيستم له ثابت ضريبونو سره تعويض کوو او Δ_k ديترمينانت ترې ترلاسه کيږي، په دې توګه د سيستم هر x_k مجهول عدد ته، يو Δ_k ديترمينانت مطابقت کوي چې د اصلي ديترمينانت په شمول، په ټولیزه توګه $n+1$ ديترمينانتونه بايد وشمېرل شي. بالاخر مجهول اعداد له لاندې اړيکې څخه ترلاسه کيږي.

$$\boxed{x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}\ ,\ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}\ ,\ x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}\ ,\ .....\ x_n=\frac{\Delta_n}{\Delta}}$$

د دوه مجهوله خطي معادلاتو سيستم عمومي حالت عبارت دی له:

$$\begin{cases} ax+b=e \\ cx+d=f \end{cases}$$

د کرامر طريقې سره سم د سيستم درې ديترمينانتونه په لاندې توګه دي:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\quad ,\quad \Delta_x=\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}\quad ,\quad \Delta_y=\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}$$

او د سيستم حل لکه څرنګه چې مخکې ترلاسه شول، عبارت دی له:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}\ ,\ y=\frac{\Delta_y}{\Delta}$$

د معادلاتو سيستم عمومي حالت په لاندې توګه دی:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$$

د کرامر طريقې سره سم تر هر څه د مخه د اړوند سيستم څلور ديترمينانتونه شمېرو:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\quad ,\quad \Delta_x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}\quad ,\quad \Delta_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

او په دې اساس د سيستم حل په لاندې توګه ترلاسه کيږي.

$$\boxed{x=\frac{\Delta_x}{\Delta}\qquad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}\qquad z=\frac{\Delta_z}{\Delta}}$$

1 **مثال:** لاندې خطي معادلاتي سيستم په کرامر طريقه حل کوو:

$$\begin{cases} 2x+3y+z=11 \\ 3x-2y-z=-4 \\ x-y+3x=8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}=-45 \ , \ \Delta_x=\begin{vmatrix} 11 & 3 & 1 \\ -4 & -2 & -1 \\ 8 & -1 & 3 \end{vmatrix}=-45$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} 2 & 11 & 1 \\ 3 & -4 & -1 \\ 1 & 8 & 3 \end{vmatrix}=-90 \ , \ \Delta_z=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 3 & -2 & -4 \\ 1 & -1 & 8 \end{vmatrix}=-135$$

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{-45}{-45}=1 \ , \ y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{-90}{-45}=2 \ , \ z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{-135}{-45}=3.$$

2 **مثال:** د $\begin{cases} 2x+3y=2 \\ x-2y=-6 \end{cases}$ معادلو سيستم حل کوو:

حل: تر هرڅه د مخه اړونده ديترمينانتونه شمېرو:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=2(-2)-(1)(3)=-4-3=-7$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -6 & -2 \end{vmatrix}=2(-2)-(3)(-6)=-4+18=14$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -6 \end{vmatrix}=2(-6)-(2)(1)=-12-2=-14$$

په دې اساس

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{14}{-7}=-2 \quad , \quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{-14}{-7}=+2$$

د مستقيم خط معادله: دهغه مستقيم خط معادله چې له (x_1,y_1) ا و (x_2,y_2) نقطو څخه تېريږي عبارت ده له:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0$$

ثبوت: د پاسينۍ اړيکې ديترمينانت دريم ستون ته په کتو سره يې انکشاف ورکوو:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 1\cdot\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} x & y \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} x & y \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x & y \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow x_1y_2 - x_2y_1 - xy_2 + x_2y + xy_1 - x_1y = 0 \quad \cdots \quad (i)$$

له بل پلوه د هغه مستقيم معادله چې له (x_1, y_1) او (x_2, y_2) نقطو څخه تېريږي عبارت ده له:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \Rightarrow (y - y_1)(x_2 - x_1) = (x - x_1)(y_2 - y_1)$$

$$\Rightarrow (y - y_1)(x_2 - x_1) - (x - x_1)(y_2 - y_1) = 0$$

$$\Rightarrow x_1y_2 - x_2y_1 - xy_2 + x_2y + xy_1 - x_1y = 0 \quad \cdots \quad (ii)$$

د (i) او (ii) رابطو له پرتله کولو څخه لرو چې:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

3 **مثال:** د هغه مستقيم خط معادله وليکئ چې له $(1,4)$ او $(0,0)$ نقطو څخه تېر شوی وي.

حل: د $(x_1, y_1) = (1,4)$ او $(x_2, y_2) = (0,0)$ لپاره لرو چې

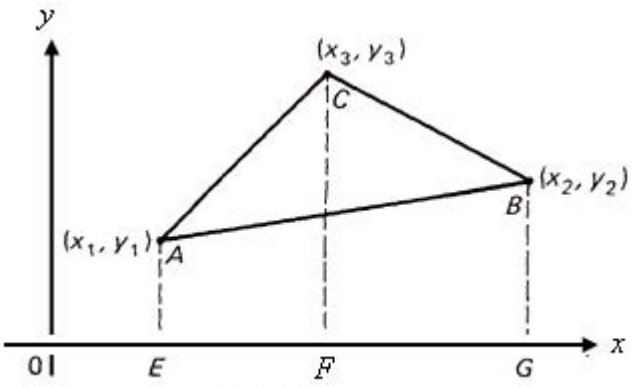
$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 1\cdot(4\cdot 0 - 1\cdot 0) - 1\cdot(x\cdot 0 - y\cdot 0) + 1\cdot(4x - 1\cdot y) = 0$$

په دې اساس غوښتل شوې معادله عبارت ده له $y = 4x$ څخه.

د مثلث مساحت شمېرل: د هغه مثلث مساحت چې راسونه يې $P_1(x_1, y_1)$ ، $P_2(x_2, y_2)$ او $P_3(x_3, y_3)$ نقطې وي (3.1 شکل) ، عبارت دی له $S = \frac{1}{2}|\Delta|$ څخه، داسې حال کې چې

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$



شکل 3.1

ثبوت. د شکل سره سم د دريو $S\,(AEFC)$ ، $S\,(CFGB)$ او $S\,(AEGB)$ ذوذنقه گانو مساحت په لاندې توګه ترلاسه کيږي.

$$S\,(AEFC) = \tfrac{1}{2}(\overline{AE} + \overline{FC}) \times \overline{EF} = \tfrac{1}{2}(y_1 + y_3)(x_3 - x_1)$$

$$S(CFGB) = \tfrac{1}{2}(\overline{CF} + \overline{GB}) \times \overline{FG} = \tfrac{1}{2}(y_3 + y_2)(x_2 - x_3)$$

$$S\,(AEFC) = \tfrac{1}{2}(\overline{AE} + \overline{GB}) \times \overline{EG} = \tfrac{1}{2}(y_1 + y_2)(x_2 - x_1)$$

په دې اساس د غوښتل شوې مثلث مساحت يعنې $S\left(\overset{\Delta}{ABC}\right)$ عبارت ده له:

$$S\left(\overset{\Delta}{ABC}\right) = S(AEFC) + S(CFGB) - S(AEGB)$$

$$= \frac{1}{2}(y_1 + y_3)(x_3 - x_1) + \frac{1}{2}(y_3 + y_2)(x_2 - x_3) - \frac{1}{2}(y_1 + y_2)(x_2 - x_1)$$

$$S\left(\overset{\Delta}{ABC}\right) = \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_3y_2 - x_2y_1 - x_1y_3) \cdots (ii)$$

له بل پلوه د راکړل شوي ديترمينانت له انکشاف وروسته لرو چې:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_3y_2 - x_2y_1 - x_1y_3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\Delta = \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_3y_2 - x_2y_1 - x_1y_3) \cdots (i)$$

د (i) او (ii) له پرتله کولو څخه ترلاسه کيږي چې

$$S\left(\overset{\Delta}{ABC}\right)=\frac{1}{2}|\Delta| \quad , \quad \Delta=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

مثال4. د هغه مثلث مساحت وشمېرئ چې $(0\ ,\ 5)$, $(0\ ,\ -5)$ او $(4\ ,\ 0)$ يې اړونده راسونه وي.

حل :

$$\Delta=\begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 \\ -5 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}=5\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}-0\cdot\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$=5\cdot(-4)-0\cdot(-5)+1\cdot(-20)=-40$$

په دې اساس د مثلث مساحت عبارت دی له:

$$S=\frac{1}{2}\times|\Delta|=\frac{1}{2}\times|-40|=\frac{40}{2}=20u^2$$

3.5 د څېرکي لنډيز

متريکس: متريکس د يوه ټاکلي جدول په ستونونو او سطرونو کې د يو شمېر کميتونو له تنظيم څخه عبارت دی. هر متريکس چې m سطر او n ستون ولري په $A_{m\times n}$ سمبول ښودل کيږي او هغه $m\times n$ بعدي متريک نومـوي. a_{ij} عنصـر د i سـطر او j سـتون پـورې اړونـد دی، $m\times n$ د متريکس بعد يا مرتبه نوميږي.

مربعي متريکس: هغه متريکس دی چې د سطرونو او ستونونو شمېر يې سره مساوي وي.

صفري متريکس: هغه متريکس دی چې ټول عناصر يې صفرونه وي او په 0_{mxn} ښودل کيږي.

سطري او ستوني متريکسونه: په سطري متريکس کې عناصر يوازې په يوه سطر کې واقع دي او د ستوني متريکس عناصر په يوه ستون کې واقع کيږي.

قطري متريکس: هغه متريکس ته قطري متريکس وايي چې غير قطري عناصر يې صفرونه وي.

واحد متريکس هر هغه متريکس چې ټول قطري عناصر يې 1 وي؛ واحد متريکس نوميږي.

مثلثي متريکس: که چېرې په يوه مربعي متريکس کې د اصلي قطر ټول پاسيني او لاندينې عناصر صفرونه وي، هغه ته (لاندينی يا پاسينی) مثلثي متريکس وايي.

د متريکسونو مساوي والي: دوه متريکسونه له يوه بل سره مساوي دي، که چېرې د سطرونو شمېر، ستونونو شمېر او مرتب عناصر يې له يوه بل سره مساوي وي.

له متريکس سره د عدد ضرب: د λ عدد او A متريکس حاصل ضرب عبارت دی له λA څخه، داسې چې هر عنصر يې د λ عـدد او A متـريکس د عـين عنصر(عين موقعيت عنصر) لـه ضرب څخه ترلاسه کيږي.

د متريکسونو جمع او تفريق: د دوو متريکسونو مجموع عبارت له هغه متريکس څخه ده چې هر يو عنصر يې د دوو متريکسونو د هم مرتبه جوړه عناصرو (په عين سطر او ستون) له مجموع څخه يې ترلاسه شوي، د A او B متريکسونو حاصل تفريق عبارت دی له: $A-B=A+(-1)B$

د متريکسونو ضرب: که چېرې د A متريکس ستونونو شمېر د B متريکس سطرونو له شمېر سره مساوي وي، د A او B متريکسونو حاصل ضرب يعنې $A\times B$ د تعريف سره سم ترلاسه کيږي.

د ترمينانت: A مربعي متريکس يعنې $\det A$ عبارت له $|A|$ حقيقي عدد څخه دی چې له يادِ متريکس څخه د تعريف سره سم ترلاسه کيږي.

په ساروس طريقه د دريم مرتبه ديترمينانت انکشاف:

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_1 & c_2 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow |A|=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3$$

د متريکس معکوس: A^{-1} متريکس د A متريکس معکوس دی کله چې $AA^{-1}=A^{-1}A=I$ وي.

د معکوس متريکس په ذريعه د خطي معادلاتي سيستم **حل:**

$$AX=B\Rightarrow A^{-1}AX=A^{-1}B\Rightarrow X=A^{-1}B$$

په کرامر طريقه د درې مجهوله خطي معادلاتي سيستم **حل** (د ببلګې په توګه)

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}\ ,\ y=\frac{\Delta_y}{\Delta}\ ,\ z=\frac{\Delta_z}{\Delta}$$

د هغه مستقيم خط معادله: چې له دوو (x_1,y_1) او (x_2,y_2) **نقطو څخه تېرشوی وي:**

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0$$

د مثلث مساحت شمېرل: د هغه مثلث مساحت چې راسونه يې (x_1,y_1) ، (x_2,y_2) او (x_3,y_3) نقطې وي، عبارت دی له $S=\frac{1}{2}|A|$ څخه، داسې حال کې چې:

$$A=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

3.6 تمرين

لاندې عملیې ترسره کړئ:

1. $\begin{pmatrix}2 & -3 & 0\\ 1 & 4 & 9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 8 & 5\\ 4 & 1 & -4\end{pmatrix}$ ، 2. $5\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5 & 0\\ 5 & 1\\ 10 & 10\end{pmatrix}$

3. $3\begin{pmatrix}2 & -5\\ 3 & 0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ ، 4. $5\begin{pmatrix}0 & -1 & 4\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & -5 & 20\\ 5 & 10 & 0\end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\ 8\end{pmatrix}$ ، 6. $\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 4\end{pmatrix}$ ،7. $\begin{pmatrix}5\\ -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix}3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}$ ، 9. $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}y\\ x\end{pmatrix}$ ، 10. $\begin{pmatrix}2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2a\\ -b\end{pmatrix}$

11. د $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & -3\end{pmatrix}$ لپاره B^2 او B^3 متریکسونه ترلاسه کړئ.

لاندې دیترمینانتونه وشمېرئ.

12. $\begin{vmatrix}3 & -2\\ 4 & 5\end{vmatrix}$ ، 13. $\begin{vmatrix}a-b & b\\ a & a+b\end{vmatrix}$ ، 14. $\begin{vmatrix}x-y & x\\ x & x+y\end{vmatrix}$

15. $\begin{vmatrix}1 & 5 & 0\\ 0 & -1 & 3\\ 3 & 2 & 4\end{vmatrix}$ ، 16. $\begin{vmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{vmatrix}$ ، 17. $\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$

18. د $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ متریکس معکوس ترلاسه کړئ.

19. $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ -\sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$ متریکس په پام کې ونیسئ، A^{-1} متریکس ترلاسه کړئ.

20. د $x\neq\pm1$ او $A=\begin{pmatrix}x & 1\\ -1 & x\end{pmatrix}$ لپاره، $\left(A^2\right)^{-1}$ متریکس وټاکئ.

21. $\begin{pmatrix}m-1 & 1\\ -2 & m\end{pmatrix}$ متریکس د m کوم قیمت ته معکوس منونکی دی.

22. $\begin{pmatrix} x & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ معادله حل کړئ.

23. د a کومو قیمتونو ته $\begin{cases} x+y=1 \\ ax+y=2 \end{cases}$ معادلاتي سیستم حل نلري.

24. د هغه مثلث مساحت وشمېرئ چې راسونه يې په $(2,3)$ ، $(2,4)$ او $(-2,5)$ نقطو پراته وي.

25. د $\begin{cases} 2x+3y+z=11 \\ 3x-2y-z=-4 \\ x-y+3z=8 \end{cases}$ معادلاتي سیستم متریکسي حالات ترلاسه کړئ.

څلورم څپرکی

د اعدادو ترادف او تصاعد

عددي ترادفونه د (رياضي انالیز) تر ټولو اساسي موضوع ده، چې د رياضي مهمو مسائلو؛ لکه شمېرنو کې خورا کارونې لري. د اعدادو د ترادفونو ساده حالت حسابي، هندسي او هارمونیک تصاعدونه دي. دلته د دې بحث لومړني او ساده مفاهیم معرفي کوو.

4.1 د ترادف مفهوم

a_1 ، a_2 ، a_3 ، ... ، a_n ، ... ټاکلي اعداد د عددي ترادف په نامه یادېږي، پاسیني هر یوه عدد ته د ترادف عنصر وایي، a_1 لومړی عنصر او a_n د دې ترادف n - ام عنصر دی او n یو طبیعي عدد ګڼل کېږي.

د یوه ترادف عناصر کېدای شي له یوه بل سره منطقي او یا الجبري اړیکې ولري. لکه

د جفت اعدادو ترادف ... , $2n$, ... , 8 , 6 , 4 , 2

د تاق اعدادو ترادف ... , $2n-1$, ... , 7 , 5 , 3 , 1

د 5 مضرب، اعدادو ترادف ... , $5n$, ... , 20 , 15 , 10 , 5

د 3 مضرب، اعدادو معکوس ترادف ... , $\frac{1}{3n}$, ... , $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$

معمولا یو ترادف د n ام ټاکلي عنصر په ذریعه تعریف او معین کېدای شي، مثلا

جفت اعداد $a_n = 2n \quad , \quad (n = 1, 2, 3, ...)$

تاق اعداد $b_n = 2n-1 \quad , \quad (n = 1, 2, 3, ...)$

د 5 مضرب اعداد $c_n = 5n \quad , \quad (n = 1, 2, 3, ...)$

د 3 مضرب معکوس اعداد $d_n = \frac{1}{3n} \quad , \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$

د ترادفونو تزاید او تناقص: هر هغه ترادف چې د عناصرو عددي قیمت یې په تدریجي ډول زیات شي؛ متزاید ترادف نومېږي، لکه د جفت اعدادو ترادف، د تاق اعدادو ترادف، د 5 مضرب اعدادو ترادف او دې ته ورته نور.

هغه ترادفونه چې د عناصرو مقدار یې په تدریجي توګه لږ شي، د متناقص ترادف په نامه یادېږي، لکه د 3 مضرب اعدادو معکوس ترادف.

مثال: 1 $a_n = n^2$ او $b_n = \frac{2}{n}$ ترادفونه متزاید دي یا متناقص؟

حل: تر هر څه د مخه د دې ترادف څو مسلسل قیمتونه فهرست کوو.

$$\begin{array}{lcccccc} n: & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_n: & 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 \\ b_n: & 2 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} & \frac{2}{5} & \frac{2}{6} \end{array}$$

ليدل کيږي چې د a_n ترادف عناصر ډيريږي، نو ويلی شو چې متزايد دی او د b_n عناصر کميږي، په دې اساس متناقص ترادف ورته ويل کيږي.

رجعي ترادف: هغه ترادف چې هر عنصر يې د خپل مخکيني عنصر په ذريعه تعريف شي، رجعي ترادف نومیږي، په دې ډول ترادفونو کې بايد د لومړي عنصر او د هر عنصر او مخکيني عنصر تر منځ اړيکه وټاکل شي.

2 **مثال:** که $a_1 = 2$ او $a_n = 2a_{n-1}$ وي د ترادف عناصر متوالياً عبارت دي له:

$$a_2 = 2a_1 = 2\cdot 2 = 4 \quad , \quad a_3 = 2a_2 = 2\cdot 4 = 8$$
$$a_4 = 2a_3 = 2\cdot 8 = 16 \quad , \quad \cdots \quad , \quad a_n = 2a_{n-1} = 2.2^{n-1} = 2^n$$

نو $a_n = 2^n$.

3 **مثال:** د ترادف لومړی او بل اختياري عنصر په لاندې توګه راکړل شوي دي.

$$a_1 = 2 \quad , \quad a_n = 2 + a_{n-1} \quad , \quad (n = 2, 3, 4, \cdots)$$

ورپسې او عمومي عناصر يې وليکئ.

$$a_2 = 2 + a_1 = 2 + 2 = 4 \quad , \quad a_3 = 2 + a_2 = 2 + 4 = 6$$
$$a_4 = 2 + a_3 = 2 + 6 = 8 \quad , \quad \cdots \quad , \quad a_n = 2n.$$

په دې اساس $a_n = 2n$ دی.

4 **مثال:** د لاندې رجعي ترادف دويم، دريم، څلورم او پنځم عنصر وټاکئ.

$$a_1 = 3 \ , \ a_n = \frac{2a_{n-1}}{1 + a_{n-1}} \ , (n = 2, 3, 4, \cdots)$$

حل:

$$a_2 = \frac{2a_1}{1+a_1} = \frac{2\cdot 3}{1+3} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \quad , \quad a_3 = \frac{2a_2}{1+a_2} = \frac{2\left(\frac{3}{2}\right)}{1+\frac{3}{2}} = \frac{6}{5}$$
$$a_4 = \frac{2a_3}{1+a_3} = \frac{2\left(\frac{6}{5}\right)}{1+\frac{6}{5}} = \frac{12}{11} \quad , \quad a_5 = \frac{2a_4}{1+a_4} = \frac{2\left(\frac{12}{11}\right)}{1+\frac{12}{11}} = \frac{24}{23}.$$

4.2 حسابي ترادف (حسابي تصاعد)

ترادفی که تفاوت بین هر جوره عناصر مجاور آن طور مرتب یک عدد ثابت d باشد بنام ترادف حسابی گفته می شود. يعني

هر هغه ترادف ته چې د هرو دوو څنګ په څنګ عناصرو تفاوت يې يو ثابت عدد(d) وي د حسابي ترادف په نامه يادېږي، يعنې

$$a_{n+1}-a_n=d \Leftrightarrow a_{n+1}=a_n+d \quad , \quad (n=1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\cdots)$$

دلته d عدد د ګډ تفاضل او a_1 د همدې حسابي ترادف لومړی عنصر نومېږي. که په يوه حسابي ترادف کې لومړی عنصر او ګډ(مشترک) تفاضل يې معلوم وي، د ترادف مشخص کول ممکن کيږي.

1 مثال: چهار عنصر اول ترادف حسابی را مشخص کنید طوری که عنصر اولش $a_1=2$ و تفاضل مشترک آن $d=3$ باشد.

د يوه حسابي ترادف څلور لومړي عناصر داسې وټاکئ چې لومړی عنصر يې $a_1=2$ او ګډ تفاضل يې $d=3$ وي.

حل:

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \\ a_2 &= a_1+d = 2+3 = 5 \\ a_3 &= a_2+d = 5+3 = 8 \\ a_4 &= a_3+d = 8+3 = 11 \end{aligned}$$

د حسابي ترادف اختياري عنصر: که چېرې a_1 لومړی عنصر، d ګډ تفاضل او a_n د حسابي ترادف n - ام عنصر وي، د دوی ترمنځ اړيکه په لاندې ډول تعريفيږي:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1+d \\ a_3 &= a_2+d = (a_1+d)+d = a_1+2d \\ a_4 &= a_3+d = (a_1+2d)+d = a_1+3d \\ a_5 &= a_4+d = (a_1+3d)+d = a_1+4d \end{aligned}$$

او بالاخره نتيجه اخلو چې:

$$\boxed{a_n = a_1+(n-1)d}$$

2 مثال: که د يوه حسابي ترادف لومړی عنصر $a_1=5$ او ګډ تفاضل يې $d=2$ وي، شلم عنصر يې څو دی؟

حل: $a_{20}=a_1+19d=5+19.2=43$

د حسابي ترادف منځني عنصر: که چېرې د يوه حسابي ترادف درې مسلسل a_{n-1} ، a_n او a_{n+1} عناصر داسې حال کې چې $(n=2\ ,\ 3\ ,\ 4\ ,\cdots)$ وي، وټاکل شي، لرو چې:

$$a_{n-1}+a_{n+1}=[a_1+(n-2)d]+[a_1+nd]=2[a_1+(n-1)d]=2a_n$$

په دې اساس

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

په دې توګه د حسابي ترادف هر عنصر د دواړو خواوو عناصرو د مجموعې له نیمایي څخه یې ترلاسه کیږي.

د دوو معلوم عناصرو په ذریعه د حسابي ترادف ټاکل: که د یوه حسابي ترادف دوه اختیاري a_m او a_n عناصر راکړل شوي وي، a_1 عنصر او ګډ تفاضل (d) یې له لاندې معادلاتي سیستم څخه د دوو مجهولونو په توګه ټاکل کیږي:

$$\begin{cases} a_1 + (m-1)d = a_m \\ a_1 + (n-1)d = a_n \end{cases}$$

داسې چې د ترلاسه کولو لپاره لومړی او دویمه معادله طرف په طرف منفي کوو، نو لرو چې:

$$a_1 + (m-1)d - \lfloor a_1 + (n-1)d \rfloor = a_m - a_n \Rightarrow (m-n)d = a_m - a_n$$

نو

$$d = \frac{a_m - a_n}{m-n}$$

په پاسینیو دوو معادلو کې د d قیمت په اچولو سره، a_1 هم ترلاسه کیږي، یعنې

$$a_1 = \frac{(m-1)a_n - (n-1)a_m}{m-n}$$

که څه هم کولی شو دا شان تصاعدونه د دوو وروستیو فورمولونو په ذریعه وټاکو، خو ښه به دا وي چې a_1 او d د پاسني معادلاتي سیستم د مستقیم حل په توګه ترلاسه شي.

3 مثال: حسابي ترادف ترلاسه کړئ داسې چې $a_5 = 21$ او $a_9 = 37$ وي.

حل: د راکړل شوو عناصرو په پام کې نیولو سره، لاندې دوه مجهوله معادلې مطرح کوو

$$\begin{cases} a_1 + 4d = a_5 \\ a_1 + 8d = a_9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 4d = 21 \\ a_1 + 8d = 37 \end{cases}$$

د پاسیني معادلاتي سیستم له حل څخه $a_1 = 5$ او $d = 4$ ترلاسه کیږي.

د حسابي ترادف د عناصرو مجموع: په یوه حسابي ترادف کې د n لومړیو عناصرو مجموع یې عبارت ده له:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)\,d\right]$$

ثبوت. که د n لومړیو عناصرو مجموع یې S_n فرض شي یعنې

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

(د مثال په توګه) د $n = 5$ لپاره لرو چې:

$$\begin{cases} S_5 = a_1 + (a_1+d)+(a_1+2d)+(a_1+3d)+(a_1+4d) \\ S_5 = (a_1+4d)+(a_1+3d)+(a_1+2d)+(a_1+d)+a_1 \end{cases}$$

وروستۍ اړيکې خوا په خوا جمع کوو، نو لرو چې:

$$\Rightarrow 2S_5 = (2a_1+4d)+(2a_1+4d)+(2a_1+4d)+(2a_1+4d)+(a_1+4d)$$

$$\Rightarrow 2S_5 = 5(2a_1+4d) \Rightarrow S_5 = \frac{5}{2}(2a_1+4d)$$

په پايله کې

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]}$$

پايله: که چېرې a_1 لومړی عنصر او a_n د يوه حسابي ترادف n-ام عنصر وي، نو

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n = \frac{n}{2}[a_1+a_n]$$

ثبوت. پوهيږو چې

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n = \frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d] = \frac{n}{2}[a_1+a_1+(n-1)d]$$

له دې چې $a_n = a_1+(n-1)d$ نو په دې اساس

$$\boxed{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n = \frac{n}{2}[a_1+a_n]}$$

4 **مثال:** له 1 څخه تر 100 پورې د طبيعي مسلسل اعدادو مجموع وشمېرئ.

حل. طبيعي اعداد هم حسابي ترادف جوړوي داسې چې $a_1 = 1 = d$ وي، په دې اساس لاندې اړيکه

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n = \frac{n}{2}[a_1+a_n]$$

کې کولی شو $n = 100$ او $a_n = 100$ وضع کړو، په دې اساس لرو چې:

$$1+2+3+\cdots+100 = \frac{100}{2}(1+100) = 50\times 101 = 5050$$

5 مثال (د طبيعي اعدادو مجموع): طبيعي اعداد هغه حسابي ترادف دی چې پکې $a_1 = 1 = d$ وي. په دې اساس د n لومړيو مسلسل طبيعي اعدادو مجموع عبارت ده له:

$$1+2+3+\ldots+n = \frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d] = \frac{n}{2}[2.1+(n-1).1] = \frac{n(n+1)}{2}$$

په دې توګه د n مسلسل طبيعي اعدادو مجموع چې له 1 څخه پيليږي عبارت ده له:

$$\boxed{1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

6 مثال (د مسلسل جفت اعدادو مجموع): د جفت اعدادو ترادف هغه حسابي ترادف دی چې پکې $a_1 = 2 = d$ وي، نو

$$2+4+6+\cdots+2n = \frac{n}{2}\left[2a_1+(n-1).d\right] = \frac{n}{2}[2.2+(n-1).2] = n(n+1)$$

$$\boxed{2+4+6+\cdots+2n = n(n+1)}$$

7 مثال (مسلسل تاق اعداد): مسلسل تاق اعداد هم حسابي ترادف دی داسې چې $a_1 = 1$ او $d = 2$. نو:

$$1+3+5+\cdots+(2n-1) = \frac{n}{2}\left[2a_1+(n-1)d\right] = \frac{n}{2}[2.1+(n-1)2] = n^2$$

$$\boxed{1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2}$$

4.3 هندسي ترادف (هندسي تصاعد)

هر هغه ترادف چې د دوو څنګ په څنګ عناصرو نسبت يې يو ثابت r عدد وي د هندسي ترادف په نامه يادېږي، يعنې. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = r \Leftrightarrow a_{n+1} = a_n\ r \quad , \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

دلته r ګډ (مشترک) نسبت او a_1 د هندسي ترادف لومړی عنصر ګڼل کېږي. هندسي ترادف هم د حسابي ترادف په شان هغه مهال مشخص کېدای شي چې لومړی عنصر او ګډ نسبت يې معلوم وي.

1 **مثال:** په يوه هندسي تردف کې $a_1 = 2$ او $r = 3$ دي؛ a_2 ، a_3 او a_4 عناصر يې وټاکی.

حل:

$$a_2 = a_1\ r = 2\cdot 3 = 6$$
$$a_3 = a_2 r = 6\cdot 3 = 18$$
$$a_4 = a_3\ r = 18\cdot 3 = 54$$

د هندسي ترادف اختياري عنصر: که چېرې a_1 لومړی عنصر او r د هندسي ترادف ګډ نسبت وي، n - ام عنصر يې عبارت دی له:

$$\boxed{a_n \ = \ a_1\ r^{n-1}}$$

ثبوت: د تصاعد عناصر يو د بل په مرسته په متوالي توګه تر لاسه کوو.

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1\ r \\ a_3 &= a_2\ r = (a_1\ r)\ r = a_1\ r^2 \\ a_4 &= a_3\ r = (a_1\ r^2)\ r = a_1\ r^3 \\ a_5 &= a_4\ r = (a_1\ r^3)\ r = a_1\ r^4 \\ &\vdots \\ \Rightarrow a_n &= a_1\ r^{n-1} \ \bullet \end{aligned}$$

د هندسي ترادف منځنۍ عنصر : کـه چېرې د يـوه هندسي تـرادف درې مسلسـل a_{n-1} ، a_n او a_{n+1} عناصر داسې چې $(n = 2 , 3 , 4 , \cdots)$ وي وتاکل شي، نو لرو چې:

$$(a_{n-1})(a_{n+1}) = (a_1\ r^{n-2})(a_1 r^n) = (a_1 r^{n-1})^2$$

له دې ځايه ترلاسه کوو چې:

$$\boxed{a_n \ = \ \sqrt{(a_{n-1})(a_{n+1})}}$$

يا په بل عبارت

$$\boxed{\frac{a_n}{a_{n-1}} \ = \ \frac{a_{n+1}}{a_n}}$$

د هندسي ترادف د عناصرو مجموع: د يوه هندسي ترادف د n مسلسل عناصرو مجموع عبارت ده له:

$$\boxed{S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = a_1 \frac{1-r^n}{1-r}}$$

ثبوت: وضع کوو چې

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

او يا $$S_n = a_1 + a_1\ r + a_1\ r^2 + a_1\ r^3 + \cdots + a_1\ r^{n-1} \qquad (1)$$

د وروستۍ اړيکې دواړې خواوې له r سره ضرب کوو او لیکو چې:

$$r\ S_n = r\ a_1 + a_1\ r^2 + a_1\ r^3 + a_1\ r^4 + \cdots + a_1\ r^n \qquad (2)$$

اوس (1) اړيکه له (2) اړيکې څخه خوا په خوا تفريق کوو.

$$r\ S_n - S_n = a_1\ r^n - a_1 \Rightarrow S_n(r-1) = a_1(r^n - 1)$$

په دې اساس $$s_n = a_1 \frac{r^n - 1}{r-1} = a_1 \frac{1-r^n}{1-r}$$ •

هندسي سلسله: که چېرې په يوه هندسي ترادف کې r مشترک نسبت له (-1,1) انتروال څخه وي، يعنې $-1 < r < 1$ په دې صورت کې د n لوړو قيمتونو ته r^n عدد فوق العاده وړو کې کيږي، په بل عبارت کله چې n بينهايت ته لنډ شي، r^n عدد صفر ته لنډيږي، په دې اساس له لاندې اړيکې

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = a_1 \frac{1-r^n}{1-r}$$

څخه د $r^n \approx 0$ په پام کې نيولو سره ترلاسه کيږي چې:

$$\boxed{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots = \frac{a_1}{1-r}}$$

د وروستۍ اړيکې کښې اړخ ته هندسي سلسله او ښۍ خوا ته يې قيمت(مجموع) وايي، هندسي سلسله په لاندې توګه هم کولی شو وليکو:

$$a_1 + a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + \cdots = \frac{a_1}{1-r}$$

د وروستۍ اړيکې دواړې خواوې په a_1 تقسيموو او ترلاسه کوو چې:

$$\boxed{1 + r + r^2 + r^3 + \cdots = \frac{1}{1-r}}$$

2 **مثال:** $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$ سلسله وشمېرئ.

حل: په دې سلسله کې $a_1 = 1$ او $r = \frac{1}{2}$ دی. په دې اساس د دستور مطابق لرو چې:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

3**مثال:** کـه چېرې پـه يـوه هندسي تصـاعد کې $a_1 = 2$ او $r = 3$ وي. د 5 عناصرو مجموع يې وشمېرئ.

حل: د فورمول مطابق لرو چې: $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = a_1 \frac{1-r^5}{1-r}$

په دې اساس $2 + 6 + 18 + 54 + 162 = 2.\frac{1-3^5}{1-3} = 2.\frac{1-3^5}{-2} = \frac{1-3^5}{-1} = 3^5 - 1 = 242$

4 **مثال:** که د يوه هندسي تصاعد لومړی عنصر $a_1 = 27$ او ګډ نسبت يې $r = \frac{1}{3}$ وي، د عناصرو د سلسلې مجموع يې وشمېرئ.

حل: بياهم فورمول په پام کې نيسو:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots = \frac{a_1}{1-r}$$

له دې ځايه $27 + 9 + 3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots = \frac{27}{1-\frac{1}{3}} = \frac{27}{\frac{2}{3}} = 40.5$

5 **مثال:** $0.6\overline{23}$ متوالي اعشار کسر د هندسي سلسلې په ذريعه په عام کسر اړوو.

حل: $0.6\overline{23} = 0.6\,23\,23\,23\cdots = 0.6 + 0.023 + 0.00023 + 0.0000023 + \cdots$

$$= \frac{6}{10} + \frac{23}{1000} + \frac{23}{100000} + \frac{23}{10000000} + \cdots = \frac{6}{10} + \frac{23}{1000}\left[1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{10000} + \cdots\right]$$

$$= \frac{6}{10} + \frac{23}{1000}\left[1 + \tfrac{1}{100} + \left(\tfrac{1}{100}\right)^2 + \cdots\right] = \frac{6}{10} + \frac{23}{1000} \times \frac{1}{1-\frac{1}{100}} = \frac{6}{10} + \frac{23}{1000} \times \frac{1}{\frac{99}{100}}$$

$$= \frac{6}{10} + \frac{23}{1000} \times \frac{100}{99} = \frac{6}{10} + \frac{23}{990} = \frac{594 + 23}{990} = \frac{617}{990}$$

په دې اساس $0.6\overline{23} = \frac{617}{990}$ ترلاسه کيږي.

4.4 هارمونيک ترادف

a_n ترادف هارمونيک ګڼل کيږي، که چېرې معکوس يې، يعنې $b_n = \frac{1}{a_n}$ يو حسابي ترادف وي.

مثال 1: د طبيعي اعدادو، تاق اعدادو، د 5 مضرب اعدادو او داسې نورو ترادفونو معکوس، هارمونيک ترادف نومېږي. يعنې

$$a_n = \frac{1}{n}: \quad 1 \ , \ \frac{1}{2} \ , \ \frac{1}{3} \ , \ \frac{1}{4} \ , \ \dots$$
$$b_n = \frac{1}{2n-1}: \quad 1 \ , \ \frac{1}{3} \ , \ \frac{1}{5} \ , \ \frac{1}{7} \ , \ \dots$$
$$c_n = \frac{1}{5n}: \quad \frac{1}{5} \ , \ \frac{1}{10} \ , \ \frac{1}{15} \ , \ \frac{1}{20} \ , \ \dots$$

د هارمونيک ترادف منځنۍ عنصر: که چېرې د يوه هارمونيک ترادف درې مسلسل a_{n-1} ، a_n او a_{n+1} عناصر وټاکل شي داسې حال کې چې $(n = 2,3,4,\dots)$ وي. د دې په پام کې نيولو سره چې $\frac{1}{a_{n-1}}$ ، $\frac{1}{a_n}$ او $\frac{1}{a_{n+1}}$ د يوه حسابي ترادف مسلسل عناصر دي، لرو چې:

$$\frac{1}{a_n} = \frac{\frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_{n-1}}}{2} \Rightarrow \frac{2}{a_n} = \frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_{n-1}} \Rightarrow \frac{2}{a_n} = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{(a_{n+1})(a_{n-1})}$$

په پايله کې

$$\boxed{a_n = \frac{2(a_{n-1})\,(a_{n+1})}{a_{n-1} + a_{n+1}}}$$

وروستۍ اړيکه په لاندې توګه هم ليکل کيږي:

$$\boxed{\frac{2}{a_n} = \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}}$$

مثال 2: د لاندې هارمونيک ترادف a_4 عنصر د دواړو خواو عناصرو له جنسه يې وښيئ.

$$1 \ , \ \frac{1}{3} \ , \ \frac{1}{5} \ , \ \frac{1}{7} \ , \ \frac{1}{9} \ , \ \frac{1}{11} \ , \ \dots$$

حل: د $a_4 = \frac{1}{7}$ دواړو لوريو ته پراته عناصر عبارت دي له $a_3 = \frac{1}{5}$ او $a_5 = \frac{1}{9}$ څخه، د قاعدې مطابق لرو

$$\frac{2a_3a_5}{a_3 + a_5} = \frac{2 \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{9}}{\frac{1}{5} + \frac{1}{9}} = \frac{\frac{2}{45}}{\frac{14}{45}} = \frac{2}{14} = \frac{1}{7} = a_4$$

د اعدادو اوسط (منځنۍ): د دوو مثبت a او b اعدادو حسابي، هندسي او هارمونيک اوسط عبارت دی له:

$A = \frac{a+b}{2}$ حسابي اوسط

$G = \sqrt{a.b}$ هندسي اوسط

$H = \frac{2a.b}{a+b}$ هارمونيک اوسط

په بل عبارت

(الف). a , A , b اعداد يو حسابي ترادف جوړوي،

(ب). a , G , b اعداد د يوه هندسي ترادف اعداد دي،

(ج). a , H , b اعداد يو هارمونيک ترادف راکوي.

مثال: د 2 او 8 اعدادو حسابي، هندسي او هارمونيک اوسط عبارت دی له:

$$A = \frac{2+8}{2} = 5 \quad , \quad G = \sqrt{2 \cdot 8} = 4 \quad , \quad H = \frac{2(2 \cdot 8)}{2+8} = 3.2$$

په دې ترتيب

2 ،5 او 8 اعداد يو حسابي ترادف دی.

2 ،4 او 8 اعداد په يو هندسي ترادف راکوي.

او 2 ، 3.2 و 8 اعداد هارمونيک ترادف جوړوي.

د اعدادو د اوسطونو تر منځ اړيکي: کـه چېرې A ، G او H پـه ترتيـب د دوو a او b اعـدادو حسابي، هندسي او هارمونيک اوسطونه وي، نو

$$\boxed{1.\ G = \sqrt{AH} \quad , \quad 2.\ H \le G \le A}$$

ثبوت: د تعريف سره سم لرو چې:

$$1.\ G = \sqrt{ab} = \sqrt{\frac{a+b}{2} \times \frac{2a.b}{a+b}} = \sqrt{AH}$$

$$2.\ \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \ge 0 \Rightarrow a + b - 2\sqrt{ab} \ge 0 \Rightarrow 2\sqrt{ab} \le a + b$$

$$\Rightarrow \frac{2\sqrt{ab}}{a+b} \le 1 \Rightarrow \frac{2\sqrt{ab}}{a+b} \times \sqrt{ab} \le 1 \times \sqrt{ab} \Rightarrow \frac{2ab}{a+b} \le \sqrt{ab}$$

$$\Rightarrow H \le G \ \ldots \ (I)$$

په همدې توګه

$$\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \ge 0 \Rightarrow a + b - 2\sqrt{ab} \ge 0 \Rightarrow 2\sqrt{a.b} \le a + b \Rightarrow \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$$

$$\Rightarrow G \le A \ \ldots \ (II)$$

د I او II له پرتله کولو ترلاسه کېږي چې:

$$H \le G \le A \quad \bullet$$

د اعدادو د اوسطونو پراخيتا: له دې مخکې حسابي، هندسي او هارمونيک اوسط د دوو حقيقي اعدادو لپاره تعريف شو، خو دغه مفهوم د n حقيقي اعدادو (a_1 ، a_2 ، a_3 ، ... ، a_n) لپاره هم تعريف کېدای شي. يعنې

$$A=\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n} \quad , \quad G=\sqrt[n]{a_1a_2a_3\cdots a_n} \quad , \quad H=\frac{na_1a_2a_3\cdots a_n}{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}$$

د موضوع دوام زمونږ د بحث په محدوده کې نه دی.

4.5 د رياضي استقراء

د رياضي استقرا هغه منطقي طريقه ده چې طبيعي اعدادو او ترادفونو د ځانګړنو په ثبوت کې کارېږي. منطقي اساس يې، له جز ځخه کل ته د موضوع پرلويز تحليل دی. په دې طريقه کې د n طبيعي اعدادو د $P(n)$ ځانګړتيا د اثبات په تکل دوه پړاونه په پام کې نيول کيږي.

لومړی پړاو: د $P(n)$ اړيکې سموالی د $n=1$ او يا د n څو نورو قيمتونو ته آزمويل کيږي.

دويم پړاو: په دې پړاو کې فرض کيږي چې قضيه د $n=k$ لپاره سمه ده، هغه مهال د دې په استناد، $n=k+1$ ادعا ثبوتيږي.

مثال: 1 ثبوت کړئ چې د هر n طبيعي عدد لپاره لاندې اړيکه صدق کوي:

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

ثبوت: $P(n)$ ځانګړنه د هر n طبيعي قيمت لپاره په لاندې توګه په پام کې نيسو:

$$P(n) \quad : \quad 1^2+2^2+3^2+\quad +n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

لومړی پړاو: د $k=1$ لپاره لرو چې: $P(1):1^2=\frac{1(1+1)(2.1+1)}{6}$

په پايله کې $P(1)$ درست دی.

دويم پړاو: اوس فرضوو چې $P(k)$ د k طبيعي عدد لپاره صدق کوي، يعنې:

$$P(k):1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

اوس غواړو وښيو چې $P(k+1)$ هم سهي ده. د وروستۍ اړيکې په دواړو خواوو کې $(k+1)^2$ زياتوو.

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$$

$$=(k+1)\left[\frac{k(2k+1)}{6}+k+1\right]=(k+1)\frac{2k^2+7k+6}{6}$$

$$= \frac{(k+1)[(k+1)+1)][(2(k+1)+1]}{6} . = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

په دې اساس $P(k+1)$ سهي ده.

2 **مثال:** ثبوت کړئ چې د هر n طبيعي عدد لپاره لاندې رابطه صدق کوي:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1+2+3+\cdots+n)^2$$

ثبوت: له دې چې $1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$ ده په دې اساس $P(k)$ ځانګړنه د هر n طبيعي قيمت لپاره به لاندې توګه په پام کې نيسو:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

لومړی پړاو: د $k = 1$ لپاره لرو چې:

$$P(1): 1^3 = \left[\frac{1.(1+1)}{2}\right]^2$$

نتيجه اخلو چې $P(1)$ سهي دی.

دويم پړاو: اوس فرضوو چې $P(k)$ د k طبيعي عدد لپاره صدق کوي، يعنې:

$$P(k): 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = \left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2$$

موضوع د $P(k+1)$ لپاره تعقيبوو. د وروستۍ اړيکې په دواړو خواوو کې $(k+1)^3$ زياتوو:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = \left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2 + (k+1)^3 = (k+1)^2\left[\frac{k^2}{4} + k + 1\right]$$

$$= (k+1)^2\left[\frac{k^2+4k+4}{4}\right] = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} = \left[\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}\right]^2$$

په دې اساس $P(k+1)$ سهي دی.

3 **مثال:** لاندې غيرمساوات ثبوت کړئ:

$$\boxed{(1+a)^n \geq 1+na \qquad , \qquad a > 0}$$

ثبوت: لومړی پړاو: د $n = 1$ لپاره لرو چې

$$(1+a)^1 = 1+1\cdot a \Rightarrow (1+a)^1 \leq 1+1\cdot a$$

په دې اساس پاسينی غير مساوات د $n = 1$ لپاره سهي دی.

دويم پړاو: فرض کوو، پاسينی غير مساوي د $n = k$ لپاره صدق وکړي، يعنې

$$(1+a)^k \geq 1+ka$$

اوس د وروستۍ اړيکې دواړې خواوې له $(1+a)$ سره ضربوو.

$$(1+a)^k(1+a)\geq(1+ka)(1+a)\Rightarrow(1+a)^{k+1}\geq 1+a+ka+ka^2\geq 1+a+ka$$

په دې اساس

$$(1+a)^{k+1}\geq 1+(k+1)a.$$

په دې توګه پاسينۍ غير مساوات، د $n=k+1$ لپاره هم صدق کوي.

4.6 ترکيبي آنالیز

فکتوريل: د n طبيعي عدد لپاره ((n فکتوريل)) مفهوم په لاندې توګه تعريفيږي:

$$n!=1\cdot 2\cdot 3\cdots n$$

$$1!=1\ ,\ 0!:=1$$

په دې اساس

$$n!=n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1\quad ,\quad n!=n(n-1)!$$

1 **مثال:** $4!$ ، $5!$ ، $\frac{7!}{6!}$ او $\frac{8!}{5!}$ اعداد وشمېرئ.

$$4!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24\qquad ,\qquad 5!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=120$$

$$\frac{7!}{6!}=\frac{7\cdot 6!}{6!}=7\quad ,\quad \frac{8!}{5!}=\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5!}{5!}=8\cdot 7\cdot 6=336$$

2 **مثال:** $\frac{(n+1)!}{n!}$ او $\frac{9!}{(3!)(6!)}$ اعداد وشمېرئ.

حل:

$$\frac{(n+1)!}{n!}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n\cdot(n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}=n+1$$

$$\frac{9!}{(3!)(6!)}=\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{(3\cdot 2\cdot 1)(6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1)}=\frac{7\cdot 8\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3}=84$$

3 **مثال:** n او k طبيعي اعدادو لپاره، داسې چې $k<n$ وي ، وښيئ چې:

$$\frac{n!}{(k!)(n-k)!}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

حل:

$$\frac{n!}{(k!)(n-k)!}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)(n-k)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{(k!)1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-k)}$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

د طبيعي اعدادو ترکيب: که چېرې k او n دوه طبيعي عددونه وي، داسې چې په دې صورت کې د k او n ترکيب عبارت دی له:

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

ځينې مهال د $\binom{n}{k}$ سمبول په ځای له C_n^k سمبول څخه کار اخيستل کيږي.

د پاسکال قضيه: د k او n طبيعي اعدادو لپاره داسې حال کې چې $0\le k\le n$ وي، لرو:

$$\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k}$$

ثبوت: له تعريف سره سم لرو چې:

$$\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}+\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$=\frac{k(n!)+(n-k+1)n!}{(n-k+1)!\,k!}=\frac{n!(k+n-k+1)}{(n-k+1)!\,k!}=\frac{(n+1)!}{k!\,(n-k+1)!}=\binom{n+1}{k}\bullet$$

4 **مثال:** $\binom{8}{3}$ او $\binom{7}{0}$ اعداد وشمېرئ.

حل:

$$\binom{8}{3}=\frac{8!}{3!(8-3)!}=\frac{8!}{3!5!}=\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5!}{3\cdot2\cdot1\cdot5!}=\frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1}=8\cdot7=56$$

$$\binom{7}{0}=\frac{7!}{0!(7-0)!}=\frac{7!}{7!}=1\quad,\quad 0!=1$$

5 **مثال:** $\binom{9}{2}$ او $\binom{5}{5}$ اعداد وشمېرئ.

حل:

$$\binom{9}{2}=\frac{9!}{2!(9-2)!}=\frac{9!}{2!7!}=\frac{9\cdot8\cdot7!}{2\cdot1\cdot7!}=\frac{9\cdot8}{2\cdot1}=9\cdot4=36$$

$$\binom{5}{5}=\frac{5!}{5!(5-5)!}=\frac{5!}{5!\cdot0!}=\frac{5!}{5!}=1\quad,\quad 0!=1$$

6 **مثال:** وښيئ چې $\binom{9}{3}+\binom{9}{4}=\binom{10}{4}$

حل: د تعريف له مخکې کولی شو وليکو چې:

$$\binom{9}{3}+\binom{9}{4}=\frac{9!}{(3!)(6!)}+\frac{9!}{(4!)(5!)}=\frac{4(9!)+6(9!)}{(4!)(6!)}=\frac{10!}{(4!)(6!)}=\binom{10}{4}.$$

7 **مثال:** ثبوت کړئ چې د $0 \le k \le n$ لپاره $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ دی.

حل:
$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)![n-(n-k)]!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}.$$

4.7 د بینوم فورمول

د دوو a او b حقیقي اعدادو او متواتر الجبري ضرب په پام کې نیولو سره یې کولی شو ولیکو:

$$(a+b)^0 = 1$$
$$(a+b)^1 = a+b$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^2$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

که د پاسیني بینومیونو د انکشافي حالت ضریبونه په مرتبه بڼه ولیکو، د پاسکال عددي مثلث په لاندې توګه ترلاسه کیږي.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

که پاسیني مثلث ته دقت وکړو، هر عدد د مخکیني سطر د اعدادو له ښیې او کیڼ لوري له مجموع څخه یې ترلاسه شوی او دا د بینومیل د انکشاف یوه قاعده ده. په دې توګه د $(a+b)^n$ انکشاف او د ضریبونو ټاکلو لپاره یې، باید پاسکال مثلث تر n سطر پورې بشپړ کړو او دغه عمل له n څخه لوړو قیمتونو ته لږ څه ستونزمن دی. نو د اعدادو د ترکیب په ذریعه د بینوم افادې انکشاف د اړونده ضریبونو په توګه یې ډېر ګټور او جالب دی.

د بینوم قضیه: د a او b حقیقي اعدادو او n طبیعي عدد لپاره لرو چې:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{r}a^{n-r}b^r + \cdots + \binom{n}{n}b^n.$$

ثبوت: (د استقراء په طريقه)

لومړی پړاو: د $n=1$ لپاره لرو چې:

$$(a+b)^1 = a+b = \binom{1}{0}a+\binom{1}{1}b$$

دويم پړاو: فرضوو چې اصلي اړيکه د $n=k$ لپاره صدق کوي، يعنې:

$$(a+b)^k = \binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \cdots + \binom{k}{r}a^{k-r}b^r + \cdots + \binom{k}{k}b^k .$$

د ورستۍ اړيکې دواړې خواوې له $(a+b)$ سره ضربوو.

$$(a+b)(a+b)^k = (a+b)\left[\binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \cdots + \binom{k}{r}a^{k-r}b^r + \cdots + \binom{k}{k}b^k\right]$$

$$= \binom{k}{0}a^{k+1} + \binom{k}{1}a^k b + \cdots + \binom{k}{r}a^{k-r+1}b^r + \cdots + \binom{k}{k}ab^k$$

$$+ \binom{k}{0}a^k b + \binom{k}{1}a^{k-1}b^2 + \cdots + \binom{k}{r}a^{k-r}b^{r+1} + \cdots + \binom{k}{k}b^{k+1}$$

$$= \binom{k}{0}a^{k+1} + \left[\binom{k}{0}+\binom{k}{1}\right]a^k b + \cdots$$

$$+ \left[\binom{k}{r-1}+\binom{k}{r}\right]a^{k-r}b^r + \cdots + \left[\binom{k}{k-1}+\binom{k}{k}\right]ab^k + \binom{k}{k}b^{k+1}$$

پوهېږو چې

$$\binom{k}{r-1}+\binom{k}{r} = \binom{k+1}{r} \quad , \quad \binom{k}{0} = \binom{k+1}{0} = \binom{k}{k} = \binom{k+1}{k+1}$$

په دې ډول

$$(a+b)^{k+1} = \binom{k+1}{0}a^{k+1} + \binom{k+1}{1}a^k b + \cdots + \binom{k+1}{r}a^{k+1-r}b^r + \cdots + \binom{k+1}{k+1}b^{k+1}$$

نو په دې اساس قضيه د $n=k$ لپاره هم سهي ده •

1مثال: د $(a+b)^3 = \binom{3}{0}a^3 + \binom{3}{1}a^2 b + \binom{3}{2}a b^2 + \binom{3}{3}b^3$ اړيکې دواړې خواوې له $a+b$ سره ضرب او تنظيموو.

حل :

$$(a+b)(a+b)^3 = (a+b)\left[\binom{3}{0}a^3 + \binom{3}{1}a^2 b + \binom{3}{2}a b^2 + \binom{3}{3}b^3\right]$$

له دې ځايه

$$(a+b)^4=\binom{3}{0}a^4+\binom{3}{1}a^3b+\binom{3}{2}a^2b^2+\binom{3}{3}ab^3$$
$$+\binom{3}{0}a^3b+\binom{3}{1}a^2b^2+\binom{3}{2}ab^3+\binom{3}{3}b^4$$

ورته حدونه له يوه بله سره جمع کوو:

$$(a+b)^4=\binom{3}{0}a^4+\left[\binom{3}{0}+\binom{3}{1}\right]a^3b+\left[\binom{3}{1}+\binom{3}{2}\right]a^2b^2+\left[\binom{3}{2}+\binom{3}{3}\right]ab^3+\binom{3}{3}b^4$$

د $\binom{3}{0}=1=\binom{4}{0}$ ، $\binom{3}{0}+\binom{3}{1}=\binom{4}{1}$ ، $\binom{3}{1}+\binom{3}{2}=\binom{4}{2}$ ، $\binom{3}{2}+\binom{3}{3}=\binom{4}{3}$ او $\binom{3}{3}=1=\binom{4}{4}$ اړیکو په پام کې نیولو سره ترلاسه کوو چې:

$$(a+b)^4=\binom{4}{0}a^4+\binom{4}{1}a^3b+\binom{4}{2}a^2b^2+\binom{4}{3}ab^3+\binom{4}{4}b^4$$

2 **مثال:** $(a+b)^5$ بینوم ته انکشاف ورکړئ او د ضرایبو مجموع یې ترلاسه کړئ.

حل: د فورمول له مخې لیکو:

$$(a+b)^5=\binom{5}{0}a^5+\binom{5}{1}a^4b+\binom{5}{2}a^3b^2+\binom{5}{3}a^2b^3+\binom{5}{4}ab^4+\binom{5}{5}b^5$$
$$\Rightarrow (a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$

او د ضرایبو مجموع عبارت دی له:

$$\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{5}{5}=2^5=1+5+10+10+5+1=32$$

د بینوم سمبولیک ښودنه: د بینوم انکشاف په سمبولیک ډول په لاندې توګه هم ښودل کیږي:

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k\equiv\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}a^{n-k}b^k$$

3 **مثال:** د بینوم فورمول په کارولو سره، $(3p-2q)^4$ ته انکشاف ورکړئ.

حل:

$$(3p-2q)^4=\left[3p+(-2q)\right]^4=\sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}(3p)^{4-k}(2q)^k$$
$$=\binom{4}{0}(3p)^4+\binom{4}{1}(3p)^3(-2q)+\binom{4}{2}(3p)^2(-2q)^2+\binom{4}{3}(3p)(-2q)^3+\binom{4}{4}(-2q)^4$$

په دې اساس $(3p-2q)^4 = 81p^4 - 216p^3q + 216p^2q^2 - 96pq^3 + 16q^4$

د بينوم ضريبونو مجموع: که چېرې په اصل بينوم او يا انکشافي حالت کې يې $a=1=b$ وضع شي، ترلاسه کوو چې:

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{r} + \cdots + \binom{n}{n}$$

د بينوم د انکشاف ځانګړنې

الف) د $(a+b)^n$ د حدونو شمېر له انکشاف وروسته له $n+1$ حد سره مساوي کيږي.

ب) په انکشافي حالت کې د پاسيني بينوم د ضريبونو مجموع له 2^n سره برابر دی.

ج) متناظر حدونه منځ لور ته له دواړو خواوو مساوي دي.

د) د a او b د توانونو مجموع په هر يوه حد کې له n عدد سره مساوي دي.

هـ) د k-ام موقعيت حد عبارت دی له $\binom{n}{k-1} a^{n-(k-1)} b^{k-1}$ څخه.

پاسکال مثلث: د پاسکال قضيې او $\binom{1}{0}$ او $\binom{1}{1}$ ضريبونو په پام کې نيولو سره، کولی شو د بينوم انکشافي ضريبونه تدريجا د $n = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ لپاره د يوه عددي مثلث(پاسکال مثلث) په توګه فهرست کړو:

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

$$\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}$$

4 **مثال:** په شمېرنو کې، د بینوم کارونې په لاندې توګه مؤثر او مروج دي.

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{2}x^3 + \cdots + \binom{n}{n}x^n$$

5 مثال: د بینوم فورمول په کارولو سره د $(x-2)^{20}$ انکشافي حالت څلورم او شپاړلسم حدونه ترلاسه کړئ.

حل: که څلورم حد په A_4 او شپاړلسم حد په A_{16} وښیو، نو لرو چې:

$$A_4 = \binom{20}{3}x^{20-3}(-2)^3 = \frac{20\cdot 19\cdot 18}{3\cdot 2\cdot 1}x^{17}(-8) = -9120x^{17}$$

$$A_{16} = \binom{20}{15}x^{20-15}(-2)^{15} = \frac{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}x^5(-32768) = 508\ 035\ 072x^5$$

4.8 د څپرکي لنډیز

ترادف –له a_1 ، a_2 ، a_3 ، ... ، a_n ، ... ټاکلو اعدادو څخه عبارت دی، چې هر یو پاسینې اعداد د یاد ترادف عناصر ګڼل کیږي، a_1 لومړی عنصر او a_n د همدې ترادف n ام عنصر دی. د یوه ترادف عناصر کېدای شي له یوه بل سره منطقي او یا الجبري منطق ولري.

تزاید و تناقص ترادف ها: هر هغه ترادف چې د عناصرو عددي قیمت یې په تدریجي توګه ډېر شي متزاید ترادف ګڼل کیږي، او هغه ترادف چې د عناصرو مقدار یې په تدریجي توګه کم شي د متناقص ترادف په نامه یادیږي.

ترادف رجعی. هغه ترادفونه چې هر عنصر یې د خپل مخکینې عنصر پواسطه تعریفیږي رجعي ترادف بلل کیږي، په دې ډول ترادفونو کې لومړی عنصر او د هر عنصر ترمنځ او مخکینې عنصر ترمنځ یې اړیکې باید ټاکل شوې وي.

ترادف حسابی (تصاعد حسابی)- هغه ترادف چې د هر څنګ په څنګ عناصرو ترمنځ تفاوت یې یو ثابت d عدد وي، د حسابي ترادف په نامه یادیږي، یعنې

$$a_{n+1} - a_n = d \Leftrightarrow a_{n+1} = a_n + d \quad , \quad (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$$

d عدد د ګډ تفاضل او a_1 د حسابي ترادف لومړی عنصر بلل کیږي.

د حسابي ترادف اختیاري عنصر: $a_n = a_1 + (n-1)d$

د حسابي ترادف منځنی (وسطي) عنصر: $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$

د دوو معلومو عناصرو په ذریعه د حسابي ترادف ټاکل: د حسابي ترادف دوو a_m او a_n اختیاري عناصرو لپاره لرو چې

$$\boxed{a_1 = \frac{(m-1)a_n - (n-1)a_m}{m-n}} \quad \text{و} \quad d = \frac{a_m - a_n}{m-n}$$

د حسابي ترادف د عناصرو مجموع

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)\,d\right] = \frac{n}{2}\left[a_1 + a_n\right]$$

د طبيعي اعدادو مجموع:
$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

د مسلسل جفت اعدادو مجموع:
$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n+1)$$

مسلسل تاق اعداد:
$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

هندسي ترادف (هندسي تصاعد) : هر هغه ترادف چې د هر يوه څنګ په څنګ عناصرو نسبت يې يو ثابت عدد وي هندسي ترادف بلل کيږي يعنې:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = r \Leftrightarrow a_{n+1} = a_n\, r \quad , \quad (n = 1\,,\ 2\,,\ 3\,,\ \cdots)$$

r عدد ګډ نسبت او a_1 د همدې ترادف لومړی عنصر ګڼل کيږي.

د هندسي ترادف اختياري عنصر:
$$a_n \quad = \quad a_1\, r^{n-1}$$

د هندسي ترادف منځنی عنصر:
$$a_n = \sqrt{(a_{n-1})\,(a_{n+1})} \Leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

د هندسي ترادف د عناصرو مجموع:
$$S_n = a_1 \frac{r^n - 1}{r-1} = a_1 \frac{1-r^n}{1-r}$$

هندسي سلسله:
$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots = \frac{a_1}{1-r}$$

هارمونيک ترادف - ترادف ته هغه مهال هارمونيک وايي چې معکوس يې حسابي ترادف راکړي.

د هارمونيک ترادف منځنی عنصر:
$$a_n = \frac{2(a_{n-1})\,(a_{n+1})}{a_{n-1} + a_{n+1}} \Leftrightarrow \frac{2}{a_n} = \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}$$

د اعدادو اوسطونه(منځني). د دوو a او b حقيقي اعدادو حسابي، هندسي او هارمونيک اوسط عبارت دی له:

هارمونيک اوسط $H = \frac{2a.b}{a+b}$ ، هندسي اوسط $G = \sqrt{a.b}$ ، حسابي اوسط $A = \frac{a+b}{2}$

د اعدادو د اوسطونو ترمنځ اړيکې: $i.\ G = \sqrt{AH}$, $ii.\ H \le G \le A$

د رياضي استقراء: د دعواوو هغه پراويز تحليل چې له جز څخه کل ترلاسه کوي.

فکتوريل: $0!:=1$, $1!:=1$, $n!:=1\cdot 2\cdot 3\cdots n$

د طبيعي اعدادو ترکيب: د n او k ترکيب داسې چې $0 \le k \le n$ وي، عبارت دی له:

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

د ترکیب ځانګړنې: $i.\ \binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k}$, $ii.\ \binom{n}{n-r}=\binom{n}{r}$

د بینوم انکشاف:

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\cdots+\binom{n}{r}a^{n-r}b^r+\cdots+\binom{n}{n}b^n$$

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k\equiv\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)}a^{n-k}b^k$$

د بینوم دانکشاف ځانګړنې

الف) د $(a+b)^n$ د حدونو شمېر له انکشاف وروسته له $n+1$ حد سره مساوي کیږي.

ب) په انکشافي حالت کې د پاسیني بینوم د ضریبونو مجموع له 2^n سره برابری دی، یعنې:

$$2^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}$$

ج) متناظر حدونه منځ لور ته له دواړو خواوو مساوي دي.

د) د a او b د توانونو مجموع په هر یوه حد کې له n عدد سره مساوي دي.

هـ) د k - ام موقعیت حد عبارت دی له $\binom{n}{k-1}a^{n-(k-1)}b^{k-1}$ څخه.

4.9 تمرین

1- $a_n=(-1)^n\frac{n}{n+1}$ ترادف په پام کې ونیسئ او a_1 ، a_5 او a_9 عناصر یې ترلاسه کړئ.

2- $1,4,9,16,25,\ldots$ ترادف ته په کتو سره هغه په a_n ډول ولیکئ.

3- $a_n=\frac{2n+1}{n}$ ترادف متزاید دی که متناقص؟ ولې؟

4- $a_n=2n^n$ ترادف متزادی دی؟ ولې؟

5- لاندینۍ کوم ترادف حسابي ترادف دی.

$I.\ 3,6,9,\ldots$ $II.\ 25,19,13,\ldots.$ $III.\ 5,10,14,\ldots$

6- k عدد داسې وټاکئ چې لاندې ترادف حسابي ترادف ترلاسه شي.

$$k-1,k+1,3k-1,\ldots$$

7- د لاندې ترادف اتلسم عنصر او د اتلسو عناصرو مجموع یې ترلاسه کړئ.

$$2,6,10,\ldots$$

8- د لاندې ترادف نه څلویښتم عنصر او د 49 عناصرو مجموع یې ترلاسه کړئ

$10 , 4 , -2 , ...$

9- د يوه حسابي تصاعد اووم عنصر 41 او د يارلسم عنصر يې 77 دی، د همدې ترادف شلم عنصر ترلاسه کړئ.

10- په يوه حسابي تصادعد کې $a_1 = 7$ او $a_9 = 77$ دی، يادترادف وټاکئ.

11- کوم يو لاندينې ترادف هندسي ترادف دی؟

$I.\ \ 4, 8, 16, ...$ $II.\ \ 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, ...$ $III.\ \ 12, -4, \frac{4}{3}, ...$

12- k عدد داسې وټاکئ چې لاندې ترادف هندسي ترادف پەلاس راکړي.

$2k-1 \ , \ 3k+1 \ , \ 6k+2 \ , \ ...$

13- د لاندې هندسي ترادف اووم عنصر او د اوو عناصرو مجموع يې ترلاسه کړئ.

$12 \ , \ 16 \ , \ \frac{64}{3} \ , \ ...$

14- د لاندې ترادف نهم عنصر او د 9 عناصرو مجموع يې ترلاسه کړئ.

$4 \ , \ -6 \ , \ 9 \ , \ ...$

15- د لاندې ترادفونو پنځم عنصر او د پنځو عناصرو مجموع يې ترلاسه کړئ.

$I.\ \ a_n = 3n-4 \ , \ n = 1,2,3,...$

$II.\ \ a_n = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n , \ n = 1, 2, 3, ...$

16- په يوه هندسي ترادف کې $a_4 = 1$ او $a_8 = \frac{1}{256}$ دی. لسم عنصر يې ترلاسه کړئ.

17- په يوه هندسي ترادف کې لومړی عنصر $a_1 = 8$ يې دی، کوم نسبت يې $r = \frac{3}{2}$ دی او د لومړيو عناصرو مجموع يې $S_n = \frac{2059}{8}$ ده، n او a_n اعداد ترلاسه کړئ.

18- له لاندې ترادفونو څخه حسابي او هندسي تصاعدونه مشخص کړئ:

$I.\ \ a_n = b\,n + c \ , \ II.\ \ b_n = 2^n \ , \ III.\ \ c_n = \alpha\, e^{\beta n}$

$IV.\ \ d_n = (1+p)^n, p \neq 0 \ , \ V.\ \ e_n = e^n$

19- د ($\frac{1}{3}$ و 243) او ($\frac{1}{3}$ و $\frac{32}{27}$) جوړه اعدادو هندسي وسط ترلاسه کړئ.

20- وښيئ چې $\cdots , \frac{2}{9} , \frac{2}{3} , 2$ ترادف يو هندسي ترادف دی او ضمنا شلم عنصر يې ترلاسه کړئ.

21- د 2 او 4 اعدادو هارمونيک اوسط ترلاسه کړئ.

22- د 4 او 9 اعدادو حسابي، هندسي او هارمونيک وسط ترلاسه کړئ.

23- د $1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots$ هندسي سلسلې مجموع ترلاسه کړئ.

24- د $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ هندسي ترادف د لومړو عناصرو مجموع يې ترلاسه کړئ.

25- د لاندې هر يوې سلسلې مجموع ترلاسه کړئ:

$I.\ \ 24 + 12 + 6 + \cdots$

$II.\ \ 25 - 20 + 16 + \cdots$

III. $0.6 + 0.06 + 0.006 + \cdots$

26- $x = 0.0\ 123\ 123\ 123\ \cdots$ متوالي کسر د يوې هندسي سلسلې په توګه په پام کې ونيسئ او هغه په عام کسر واړوئ.

27- لاندې رابطې په استقراء طريقه ثبوت کړئ.

$$I.\quad 1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{1}{3}n(4n^2 - 1)$$

$$II.\quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \tfrac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

$$III.\quad 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \cdots + (n-1)\cdot n = \frac{(n-1)\,n\,(n+1)}{3}$$

28- $(3x + 2y)^5$ بينوم ته انکشاف ورکړئ.

29- د $(x+y)^{15}$ بينوم اووم عنصر ترلاسه کړئ.

30- د $\left(\frac{2}{x} + \frac{x^2}{14}\right)^{14}$ بينوم داسې يو حد ترلاسه کړئ چې x^4 وي.

31- د $(u-1)^{18}$ بينوم پنځم او دوولسم حدونه وټاکئ.

پنځم څپرکی
تابع او ګراف

د تابع مفهوم د لومړي ځل لپاره په 1696 کال کې د لایپ نیڅ لخوا د ریاضي ځینو مفاهیمو له تعمیم سره یو ځای مطرح شو، یوهان برنولي په 1718 کال کې د متحولینو له تحلیل څخه د تابع اصطلاح وکاروله، اویلر (1783–1707) د منحني ګانو د ځانګړنو په مطالعه کې $f(x)$ سمبول وکارولو، کلیرو په 1734 کال کې د تابع مفهوم عملا وکارولو، دیریکله (1859–1805) د تابع د تعریف او قیمت ناحیې مطرح کړې. نن د ریاضي په هر شمېر عمده مباحث لکه لیمت، مشتق، انتګرال، تقاضلي معادلې، محاسبوي میتودونه او داسې نور د تابع د تحول او ځانګړنو پرمبنا راڅرګندیږي. د فزیک قواعد او طبیعي حوادث د تابع په مرسته توضیح او تشریح کیږي. په دې څپرکي کې تابع او عمومي ځانګړنې یې په لنډه توګه پېژندل کیږي.

5.1 د تابع پېژندل

له X سیټ څخه Y سیټ ته f تابع هغه رابطه ده چې له X څخه هر x عنصر ته یو او یوازې یو عنصر له Y څخه مربوط شي، x ته خپلواک متحول او y ته مربوط متحول وایي، x ته د f تابع په ذریعه د y انځور وایي او لیکي:

$$\boxed{\begin{aligned} f &: X \to Y \\ x &\to y = f(x) \end{aligned}}$$

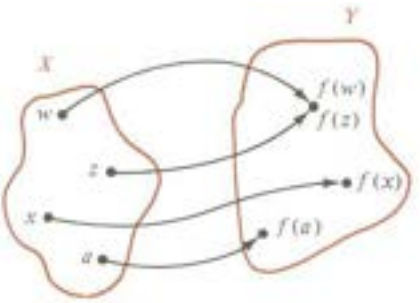
دلته X د تعریف ناحیه (*domain*) او د y کوم سیټونه چې له یادې اړیکې څخه ترلاسه کیږي، د f تابع قیمتونو سیټ (*renge*) نومېږي. د f تابع قیمتونو سیټ او تعریف ناحیه عبارت دله له:

$$D_f = \{x \in X : y = f(x),\ y \in Y\}$$
$$R_f = \{y \in Y : y = f(x),\ x \in D_f\}$$

د f تابع قیمتونو سیټ په $f(D_f)$ هم لیکي، یعنې

$$\boxed{R_f = f(D_f)}$$

Y سیټ ته د تابع د قیمتو ناحیه (*codomain*) وایي، ښکاره ده چې $R_f \subset Y$. تابع په بیلابیلو شکلونو لکه د $X \times Y$ عناصرو د سیټ، جدول، فورمول، دوه مجهوله معادلې او یا ګراف په توګه ښودل کیږي. په دې مبحث کې تابع ګانې د حقیقي اعدادو سیټ کې مطرح کیږي. کله چې تابع د فورمول په ذریعه ښودل کیږي، د تعریف ناحیه یې هغه اعداد دي چې د ځای په ځای کېدو وړتیا پکې ولري (5.1 شکل) البته د توابعو د تعریف ناحیې کولی شو د طبیعي حالت څخه هم محدود په پام کې ونیسو خو ډیر وخت د اعدادو له انتروالونو استفاده کیږي.



5.1 شکل

1 **مثال:** د $f(x)=2x^2-x$ تابع په پام کې نیولو سره، $f(-1)$ ، $f(0)$ ، $f(2)$ ، $f(\pi)$ ، $f(x+h)$ او $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ اعداد داسې حال کې چې $h\neq 0$ وي، وشمېرئ.

حل :

$$f(-1)=2(-1)^2-(-1)=3 \quad , \quad f(0)=2(0)^2-(0)=0$$

$$f(2)=2(2)^2-2=6 \quad , \quad f(\pi)=2\pi^2-\pi$$

$$f(x+h)=2(x+h)^2-(x+h)=2(x^2+2xh+h^2)-(x+h)$$

$$=2x^2+4xh+2h^2-x-h$$

د تابع د تعریف ناحیې او د قیمتونو سیټ ټاکل. که تابع د فورمول په توګه راکړل شوې وي، هغه اعداد یې په تعریف ناحیه کې یې شامل نه دي، چې معمولي عملیې ورته د منلو وړ نه وي، لکه څرنګه چې د کسر مخرج صفر کېدای نشي، منفي عدد جفت مرتبه جذر نلري او یا د غیر مثبت اعدادو لپاره لوګارتم نه مطرح کیږي. د تابع د قیمتونو ناحیې ټاکل د ګراف له دقیق رسم وروسته ټاکل کیږي او د ګراف رسمول هم آسانه کار نه دی.

2 **مثال:** لاندې جدول کې څلور تابع ګانې د اړونده تعریف او قیمت ناحیو سره یې ځانګړې شوې:

$y=f(x)$	D_f	R_f
$y=\sqrt{1-x^2}$	$[-1\ ,\ 1]$	$[0,1]$
$y=\frac{1}{x}$	$(-\infty,0)\cup(0,\infty)$	$(-\infty,0)\cup(0,\infty)$
$y=\sqrt{x}$	$\lfloor 0,\ \infty)$	$\lfloor 0,\ \infty)$
$y=\sqrt{4-x}$	$(-\infty,4]$	$\lfloor 0,\ \infty)$

3 **مثال:** د $f(x)=\frac{x+4}{2x-6}$ تابع د تعریف ناحیه وټاکئ.

حل: ښکاري چې د $x=3$ لپاره د تابع مخرج صفر کیږي، په دې اساس 3 عدد د f تابع په تعریف ناحیه کې شامل نه دی ، یعنې $D_f=\mathbb{R}\setminus\{3\}$ دی.

4 **مثال:** د $g(x)=\sqrt{x-5}$ د تعريف ناحيه وټاکئ.

حل: له دې چې ټولو له 5 څخه وړو اعدادو لپاره $x-5$ افاده منفي قيمت اخلي او جذر نلري، په دې اساس د تعريف ناحيه يې عبارت ده له $D_g=[5,\infty)$ څخه.

د تابع ګراف: په قايم مختصاتو کې د مستوي نقطو (x,y) سيټ چې $y=f(x)$ اړيکه صدق کوي، د $f(x)$ تابع له ګراف څخه عبارت ده، په بل عبارت د تابع ګراف هغه منحني دی چې د $y=f(x)$ معادلې په مرسته ټاکل کيږي، يعنې:

$$G(f)=\{(x,y): y=f(x),\ x\in D_f\}$$

د عمودي خط معيار: دوه مجهوله معادله يوه تابع ښيي که چېرې هر عمودي خط اړونده ګراف په يوه نقطه کې قطع کړي.

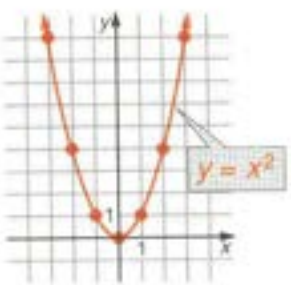
5 **مثال:** آيا $x^2+y^2=9$ معادله يوه تابع ده؟

حل: د دې معادلې ګراف هغه دايره ده چې شعاع يې $r=3$ وي او هر عمودي خط چې x محور په $(-3,3)$ انټروال کې قطع کړي په حقيقت کې دايره په دوو نقطو کې قطع کوي، په دې اساس يادې معادلې ته تابع نه وايي.

6 **مثال:** د $y=x^2$ ګراف رسم کړئ او ووايئ چې يوه تابع ده کنه؟

حل: د تابع قيمت په څو ټاکلو اعدادو کې ټاکو، غوښتل شوی ګراف په لاندې توګه رسميږي (5.2 شکل)

x	x^2	y
−3	$(-3)^2$	9
−2	$(-2)^2$	4
−1	$(-1)^2$	1
0	$(0)^2$	0
1	$(1)^2$	1
2	$(2)^2$	4
3	$(3)^2$	9



5.2 شکل

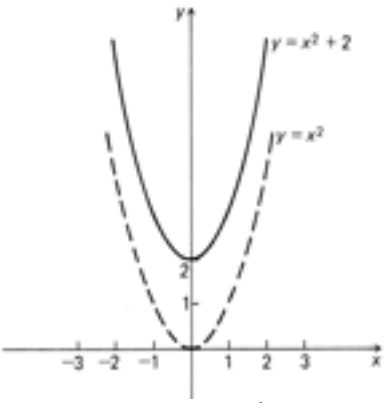
ليدل کيږي چې له y محور سره هر موازي خط يا ګراف يوازې او يوازې په يوه نقطه کې قطع کوي، نو ويلی شو چې دغه ګراف په يوې تابع پورې اړوند دی.

د تابع ګراف لېږدول: که چېرې f يوه تابع او c يو حقيقي عدد وي په دې صورت کې $y=f(x)+c$ ګراف د $y=f(x)$ ګراف عمودي لېږد دی، ($c>0$ پاس لورته او $c<0$ لاندې لورته).

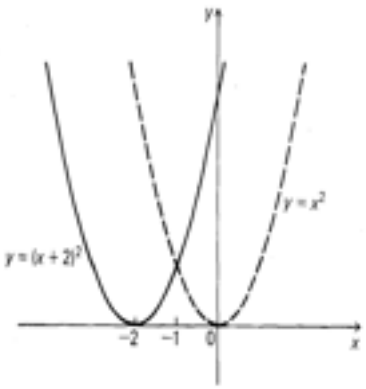
$y=f(x+c)$ ګراف د $y=f(x)$ ګراف افقي لېږد دی ($c>0$ کيڼ لورته او $c<0$ ښي لورته).

7 **مثال:** $y=x^2$ تابع په پام کې نیسو، $y=x^2+2$ او $y=(x+2)^2$ ګرافونه ورسره پرتله کړئ.

حل: د $f(x)=x^2$ تابع په پام کې نیولو سره $y=x^2+2=f(x)+2$ او $y=(x+2)^2=f(x+2)$ کیږي، په دې اساس $y=x^2+2$ د $y=x^2$ ګراف (5.4 شکل) عمودي لېږد او $y=(x+2)^2$ یې افقي لېږد دی (5.3 شکل).



5.4 شکل



5.3 شکل

5.2 د توابعو عمومي ځانګړتیاوې

په دې برخه کې د توابعو مساوات، د توابعو الجبري عملیې، د توابعو جفت او تاق والی، د توابعو تزاید او تناقص او د توابعو یو په یو والی تر څېړنې لاندې نیول کیږي.

د توابعو مساوي والي: دوې f او g تابع مساوي بلل کېږي که یوازې او یوازې لاندې شرایط رېښتینې کړي.

لومړی. د تعریف ناحیې یې له یوه بل سره مساوي وي، یعنې $D_f=D_g$

دویم. له تعریف ناحیې څخه د هر x لپاره، $f(x)=g(x)$ وي.

1 **مثال:** آیا $f(x)=x^2-1$ او $g(x)=\frac{x^4-1}{x^2+1}$ توابع له یوه بل سره مساوي دي؟

حل: واضح ښکاري چې $D_f=\mathbb{R}=D_g$، له بل پلوه

$$g(x)=\frac{x^4-1}{x^2+1}=\frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x^2+1}=x^2-1=f(x)$$

په دې اساس f او g توابع له یوه بل سره مساوي دي، یعنې $f=g$.

2 **مثال:** آیا $f(x)=x+1$ او $g(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ توابع له یوه بل سره مساوي دي؟

حل: لیدل کېږي چې $D_f=\mathbb{R}$ او $D_g=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ یعنې د دې دوو د تعریف ناحیې له یوه بله سره مساوي نه دي، داسې حال کې چې:

$$g(x)=\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1=f(x),\forall x\in D_g$$

د توابعو الجبري عمليې: که چېرې f او g دوې تابع ګانې وي، جمع، تفریق، ضرب او تقسیم یې په لاندې توګه تعریفیږي:

$$i.\ (f+g)(x)=f(x)+g(x)\quad,\quad D_{f+g}=D_f\cap D_g$$
$$ii.\ (f-g)(x)=f(x)-g(x)\quad,\quad D_{f-g}=D_f\cap D_g$$
$$iii.\ (fg)(x)=f(x)g(x)\quad,\quad D_{fg}=D_f\cap D_g$$
$$iv.\ (cf)(x)=cf(x),\ c\in\mathbb{R}\quad,\quad D_{cf}=D_f$$
$$v.\ \left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)},\ D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g\setminus\{x\in D_g: g(x)=0\}$$

3 مثال: $f(x)=\frac{1}{x-2}$ او $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ توابع په پام کې نیسو، $f+g$، $f-g$، fg او $\frac{f}{g}$ توابع د اړوند تعریف ناحیو سره یې وټاکئ.

حل: لیدل کیږي چې $D_f=\mathbb{R}\setminus\{2\}$ او $D_f=(1,\infty)$ او $D_f\cap D_g=(1,2)\cup(2,\infty)$.

په دې اساس د $f+g$، $f-g$، fg او $\frac{f}{g}$ توابعو د تعریف ناحیې عبارت دي له $(1,2)\cup(2,\infty)$ څخه.

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\frac{1}{x-2}+\frac{1}{\sqrt{x-1}}$$
$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{\sqrt{x-1}}$$
$$(fg)(x)=f(x)g(x)=\frac{1}{(x-2)\sqrt{x-1}}$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\sqrt{x-1}}{x-2}$$

4 مثال: که چېرې $f(x)=2x-1$ او $g(x)=x^2+1$ راکړل شوې وي، $4(f+g)(x)$ او $5(fg)(x)$ توابع وټاکئ.

حل:

$$i.\ 4(f+g)(x)=4f(x)+4g(x)=4(2x-1)+4(x^2+1)=4x^2+8x$$
$$ii.\ 5(fg)(x)=5f(x)g(x)=5(x^2+1)(2x-1)=10x^3-5x^2+10x-5$$

جفت او تاق توابع: f تابع ته جفت تابع ويل کيږي که چېرې له D_f څخه هر x عدد ته، $-x$ عدد هم د D_f اړوند وي او $f(-x)=f(x)$ شرط صدق کړي. د $y=f(x)$ جفت تابع ګراف نظر y محور ته متناظر دی.

f تابع د تاق تابع په نامه يادېږي که چېرې له D_f، څخه x عدد لپاره $-x$ عدد هم د D_f اړوند وي او $f(-x)=-f(x)$ شرط صدق کړي. د $y=f(x)$ تاق تابع ګراف نظر مبدا ته متناظر دی.

5 مثال: $f(x)=3x^2$ تابع جفت ده، ځکه چې $D_f=(-\infty,\infty)$

$$f(-x)=3(-x)^2=3x^2=f(x)$$

$g(x)=x^3+9x$ تاق ده، ځکه چې $D_g=(-\infty,\infty)$

$$g(-x)=(-x)^3+9(-x)=-(x^3+9x)=-g(x)$$

6 مثال: $u(x)=|x|$ تابع جفت او $v(x)=\frac{1}{x}$ تابع تاق ده. ځکه چې:

$$u(-x)=|-x|=|x|=u(x)$$

$$v(-x)=\frac{1}{-x}=-\frac{1}{x}=-v(x)$$

7 مثال: که چېرې f او g توابع تاق وي، fg تابع جفت ده که تاق؟

حل: $(fg)(-x)=f(-x)g(-x)=[-f(x)][-g(x)]=f(x)g(x)=(fg)(x)$

په دې اساس fg تابع جفت ده.

د تابع صريح(بشکاره) او ضمني حالت: هر دوه مجهوله معادله په يوه مناسب انتروال کې، کولی شو د يوې تابع په توګه په پام کې ونيسو، په ځينو دوه مجهوله معادلو کې، ممکن يو له متحولينو څخه د دويم متحول له جنسه وښودل شي، خو په عمومي توګه دا امکان شتون نلري. که د x او y په يوه دوه مجهوله معادله کې y متحول د x له جنسه په $y=f(x)$ حالت وښودل شي، هغه ته صريح تابع وايي، خو هغه توابع چې د يوې معادلې پواسطه په صريح حالت نه وي ښودل شوې او يا ونه ښودل شي، هغه تابع ته ضمني(غير صريح) تابع وايی.

8 مثال: $x^2+y^2=9$ معادله د کوم ډول تابع په توګه په پام کې نيول کيږي؟

حل: دغه معادله په عمومي توګه يوه دايره ښيي، خو په ټاکلو انتروالونو کې کېدای شي د يوې دايرې يوه برخه د يوې تابع په توګه په پام کې ونيسو، په دې اساس y د x ضمني تابع دی او يا x د y ضمني تابع ګڼل کيږي. دغه معادله کولی شو دوو $y=\sqrt{9-x^2}$ او $y=-\sqrt{9-x^2}$ صريح توابعو په توګه وښيو چې اړونده ګرافونه يې د x محور نيم پاسينۍ او نيم لاندينۍ دايره ده.

9 **مثال:** $x^2+y^2-xy+8=0$ رابطه د کوم ډول تابع په توګه په پام کې نیولی شو؟

حل : له دې رابطې څخه نشو کولی یو متحول د دویم له جنسه یې وښودل شي، خو y کولی شو د x متحول ضمني تابع په توګه په پام کې ونیول شي، یعنې پاسینۍ تابع په صریح حالت کې نشي ارائه کېدای.

10 **مثال:** له $ax+by+c=0$ رابطې څخه y متحول د x له جنسه د صریح تابع په توګه وښیئ.

حل : $ax+by+c=0\Rightarrow by=-ax-c\Rightarrow y=-\frac{1}{b}x-\frac{c}{b}$

په دې اساس د دې تابع صریح حالت $y=-\frac{1}{b}x-\frac{c}{b}$ دی.

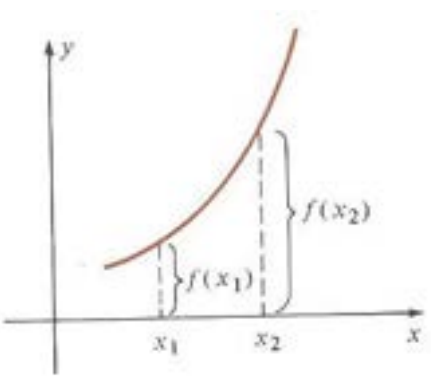
د تابع پارامتریک حالت: په یوه $y=f(x)$ تابع کې ممکن چې $x=\varphi(t)$ او $y=\psi(t)$ متحول هر یو د یوه دریم t متحول د تابع په توګه راکړل شوي وي، په دې صورت کې t ته پارامتر او د تابع دې حالت ته د تابع پارامتریک حالت وایي.

11 **مثال:** آیا $x=5\cos t$ و $y=5\sin t$ پارامتریک تابع کولی شو د دوو x او y متحولینو د ضمني یا صریح حالت تابع په توګه وښیو.

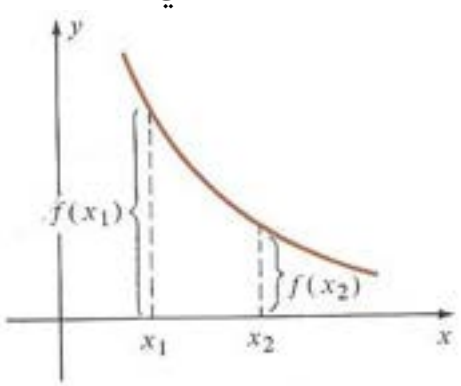
حل : $x^2+y^2=(5\cos t)^2+(5\sin t)^2=25(\cos^2 t+\sin^2 t)=25$

په دې اساس د دې تابع ضمني حالت له $x^2+y^2=25$ څخه عبارت دی.

د توابعو تزاید او تناقص: f تابع په یوه انټروال کې دقیقا متزایده ده، که چېرې له $f(x_1)<f(x_2)$ ځانګړتیا څخه، د همدې انټروالې د هر x_1 او x_2 لپاره $x_1<x_2$ شرط ترلاسه شي(5.6 شکل) او f تابع په یوه انټروال کې دقیقا متناقص ده که له $x_1<x_2$ څخه د یاد انټروال x_1 او x_2 ته $f(x_1)>f(x_2)$ شرط ترلاسه شي(5.5 شکل)



5.6 شکل



5.5 شکل

12 **مثال:** د لاندې توابعو تزاید او تناقص وټاکئ:

$i.\ f(x)=2x+3\ ,\ ii.\ g(x)=-2x+1$

حل :

$$i.\ f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow 2x_1 + 3 < 2x_2 + 3 \Rightarrow 2x_1 < 2x_1 \Rightarrow x_1 < x_2$$
$$ii.\ g(x_1) < g(x_2) \Rightarrow -2x_1 + 1 < -2x_2 + 1 \Rightarrow -2x_1 < -2x_2 \Rightarrow x_1 > x_2$$

په دې اساس $f(x) = 2x + 3$ تابع متزايد او $g(x) = -2x + 1$ تابع متناقص ده.

يو په يو تابع: د f تابع، يو په يو تابع (*One – to – one function*) ګڼل کيږي، که چيرې له $f(x_1) = f(x_2)$ تساوي څخه، $x_1 = x_2$ تساوي ترلاسه شي، يعنې:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

اويا

$$f(x_1) \neq f(x_2) \Leftrightarrow x_1 \neq x_2$$

يو په يو تابع د *Injective* تابع پنامه هم يادېږي.

مثال: 13 $f(x) = 2x^3 + 1$ تابع يو په يو ده. او $g(x) = x^2 + 8$ تابع يو په يو نه ده ځکه چې:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1^3 + 1 = 2x_2^3 + 1 \Rightarrow x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow x_1 = x_2$$
$$g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1^2 + 8 = x_2^2 + 8 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = \pm x_2$$

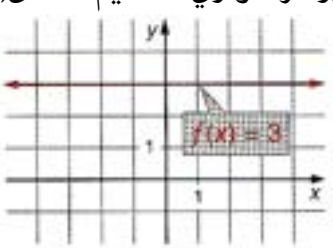
د ساري په توګه $g(2) = 12 = g(-2)$.

د افقي خط معيار: که چيرې يوه تابع يو په يو وي له x محور سره هر موازي مستقيم خط تابع يو ازې په يوه نقطه کې قطع کوي.

5.3 ځينې اساسي توابع

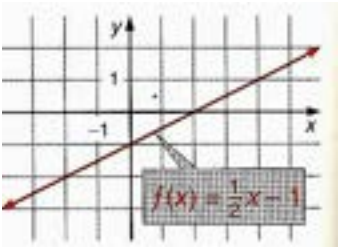
دلته څو له $\mathbb{R}$ څخه په $\mathbb{R}$ کې تابع ګاني د بيلګې په توګه راوړل کيږي.

ثابت تابع: $f(x) = c$ تابع داسې حال کې چې c يو ثابت عدد وي ، ثابت تابع يادېږي، د تعريف ناحيه يې حقيقي اعداد او د قيمتونو سيټ يې يو عنصر يعنې $R_f = \{a\}$ دی. دغه تابع يو په يو نه ده. د ثابت تابع ګراف د x محور سره موازي مستقيم خط دی(5.7 شکل).



5.7 شکل

خطي تابع: د خطي تابع عمومي حالت $f(x) = mx + b$ دی، داسې حال کې چې m او b ثابت اعداد دي، د تعريف ناحيه او د قيمتونو سيټ يې عبارت دی د حقيقي اعدادو له سيټ څخه خطي تابع يو په يو هم ده. د ساري په توګه د $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$ تابع ګراف لاندې شکل لري(5.8 شکل).



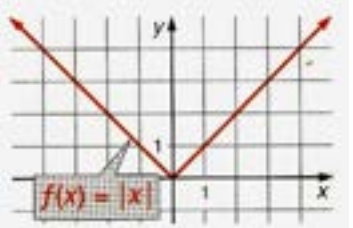
5.8 شکل

د طاقت تابع: د طاقت تابع $f\left(x\right)=x^{\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}$ شکل لري، د طاقت تابع د تعريف ناحيه د α په پام کې نيولو سره بيلابيل حالات لري او بيلګې يې عبارت دي له $y=x^{2}$ ، $y=x^{\frac{1}{2}}$ ، $y=x^{-3}$ او $y=x^{-\frac{3}{4}}$ څخه.

د مطلقه قيمت تابع: دغه تابع عبارت ده له

$$f\left(x\right)\ =\ \left|x\right|\ =\ \begin{cases} x & ,\ x\geq 0 \\ -x & ,\ x<0 \end{cases}$$

څخه، منفي اعداد يې د قيمتونو په سيټ کې شامل نه دي، نو يو په يو نه ده(5.9 شکل).

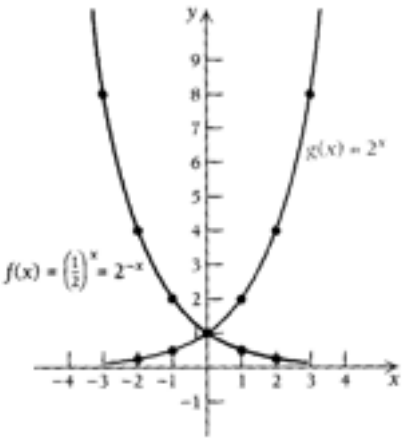


5.9 شکل

نمائي تابع: نمائي تابع عبارت ده له $f\left(x\right)=a^{x}$ څخه داسې حال کې چې $a>0$ او $0<a\neq 1$ په $\mathbb{R}$ کې يو په يو ده

$$D_{f}=\mathbb{R}\quad ,\quad R_{f}=\left(0,\infty\right)$$

د $f\left(x\right)=2^{x}$ او $f\left(x\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ توابعو ګرافونه د ښلګې په توګه په لاندې ډول ښودل کيږي (5.10 شکل).



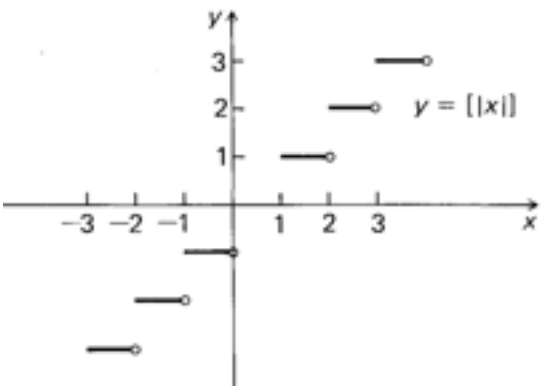
5.10 شکل

زينه اي تابع (د تر ټولو ستر تام عدد تابع): عبارت له هغه تابع څخه ده چې د هر x عدد لپاره تر ټولو ستر تام عدد د x سره مساوي يا تر يو وړ مربوطه کيږي او په x سمبول ښيي. له دې چې هر x حقيقي عدد ته n تام عدد هم موجود دی داسې چې $n \le x < n+1$ وي(5.11 شکل)، په دې اساس يا ده تابع عبارت ده له:

$$f(x) = x = n \quad , \quad n \le x < n+1$$

د بېلګې په توګه

$$f(-2.98) = -2.98 = -3 \quad , \quad f(-0.6) = -0.6 = -1$$
$$f(0.79) = 0.79 = 0 \quad , \quad f(3.8897) = 3.8897 = 3$$



5.12 شکل

1 **مثال:** $f(x)=\frac{10x+0.5}{10}$ تابع په پام کې نیسو ، $f(6)$ ، $f(1.8)$ ، $f(4.582)$ او $f(-2.68)$ یې شمېرو.

حل :

$$f(6)=\frac{10\times 6+0.5}{10}=\frac{60.5}{10}=\frac{60}{10}=6$$

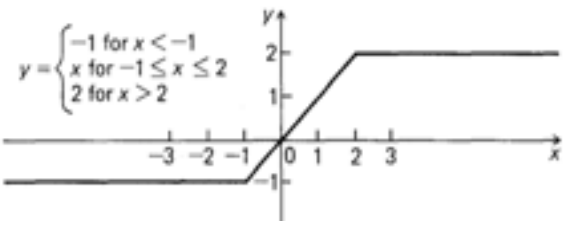
$$f(1.8)=\frac{10(1.8)+0.5}{10}=\frac{18.5}{10}=\frac{18}{10}=1.8$$

$$f(4.582)=\frac{10(4.582)+0.5}{10}=\frac{46.32}{10}=\frac{46}{10}=4.6$$

$$f(-2.68)=\frac{10(-2.68)+0.5}{10}=\frac{-26.3}{10}=\frac{-27}{10}=-2.7$$

پیوند(ټرل) شوې تابع: دغه تابع په بیلابیلو انتروالونو کې د څو تابع ګانو له نښلیدو څخه ترلاسه کیږي او یوه ښلګې یې په لاندې ډول ده(5.13 شکل).

$$f(x)=\begin{cases}-1 & , \quad x<-1\\ x & , \quad -1\le x\le 2\\ 2 & , \quad x>2\end{cases}$$



5.13 شکل

لکه څرنګه چې $f(-5)=-1$ ، $f(2)=2$ ، $f(1.86)=1.86$ ، $f(3)=2$ او $f(8.1)=2$ دی.

د اشارې تابع(سیګنال تابع): عبارت له هغه تابع څخه عبارت ده هر مثبت $+1$ ، هر منفي -1 او 0 ، 0 ته اړوند شي یعنې

$$sign(x)=\begin{cases}1 & \Leftarrow \quad x>0\\ 0 & \Leftarrow \quad x=0\\ -1 & \Leftarrow \quad x<0\end{cases}$$

لکه $sign(8.23)=1$ ، $sign(-7.52)=-1$ ، $sign(24)=1$ ، $sign(-6)=-1$ او $sign(0)=0$

5.4 د توابعو ترکیب (د تابع، تابع)

د f او g توابعو ترکیب د تعریف سره سم عبارت دی له:

$$(f\circ g)(x)=f\left(g\left(x\right)\right)\quad,\quad(g\circ f)(x)=g\left(f\left(x\right)\right)$$

داسې حال کې چې د تعریف ناحیې یې په لاندې توګه تاکل کیږي:

$$D_{f\circ g}=\left\{x\in D_g:g\left(x\right)\in D_f\right\}\quad,\quad D_{g\circ f}=\left\{x\in D_f:f\left(x\right)\in D_g\right\}$$

$f\circ g$ او $g\circ f$ توابع، مرکب توابع (د تابع تابع) نومیږي.

$f\circ g$ تابع د تعریف وړ ده کله چې $R_f\cap D_g\neq\varnothing$ وي. په همدې توګه $g\circ f$ تابع تعریف کېدای شي کله چې $R_g\cap D_f\neq\varnothing$ وي.

1 مثال: $f\left(x\right)=x^2$ او $g(x)=\sqrt{1+x}$ توابع راکړل شوي، $(f\circ g)(x)$ او $(g\circ f)(x)$ توابع ترلاسه کوو.

حل:

$$(g\circ f)(x)=g\left(f\left(x\right)\right)=\sqrt{1+f\left(x\right)}=\sqrt{1+x^2}$$

$$(f\circ g)(x)=f\left(g(x)\right)=[g(x)]^2=[\sqrt{1+x}]^2=1+x$$

2 مثال: د $f(x)=x^2+1$ او $g\left(x\right)=2x$ لپاره، $g\circ f$ ، $f\circ g$ ، $f\circ f$ او $g\circ g$ توابع، د تعریف ناحیو په نه پام کې نیولو سره ولیکئ.

حل:

$$(f\circ g)(x)=f\left(g(x)\right)=(g(x))^2+1=(2x)^2+1=4x^2+1$$

$$(g\circ f)(x)=g(f\left(x\right))=2f\left(x\right)=2(x^2+1)=2x^2+2$$

$$\left(g\circ g\right)(x)=g\left(g\left(x\right)\right)=2g\left(x\right)=2\left(2x\right)=4x$$

$$(f\circ f)(x)=f\left(f\left(x\right)\right)=(f\left(x\right))^2+1=(x^2+1)^2+1=x^4+2x^2+2$$

$$(f\circ g)(3)=4\cdot3^2+1=37\quad,\quad(g\circ f)(2)=2\cdot2^2+2=10$$

$$(f\circ f)(0)=0^4+2\cdot0^2+2=2\quad,\quad\left(g\circ g\right)(8)=4\cdot8=32$$

3 مثال: د دوو $f(x)=3x-1$ او $g(x)=\frac{x+1}{3}$ توابعو لپاره $f\circ g$ و $g\circ f$ ولیکئ.

$$(f\circ g)(x)=f\left(g(x)\right)=3g(x)-1=3\times\frac{x+1}{3}-1=x+1-1=x$$

$$\Rightarrow(f\circ g)(x)=x$$

$$(g\circ f)(x)=g[f\left(x\right)]=\frac{f\left(x\right)+1}{3}=\frac{3x-1+1}{3}=\frac{3x}{3}=x$$

$$\Rightarrow(g\circ f)(x)=x$$

معکوس تابع: که چېرې f داسې یو په یو تابع وي چې د تعریف ناحیه یې X او د قیمتونو سیټ یې Y وي، نو g تابع چې Y یې د تعریف ناحیه او X یې د قیمتونو سیټ دی، د f تابع معکوس نومیږي، که

$$(f \circ g)(x) = f\left(g(x)\right) = x \quad \forall x \in Y$$
$$(g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right) = x \quad \forall x \in X$$

د f یو په یو تابع لپاره، یوازې یوه g یو په یو معکوس تابع موجوده ده. معمولا وایي f او g توابع د یوه بل معکوس دي، د دوی ترمنځ لاندې رابطې موجودې دي.

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$$

او معمولا لیکو $f^{-1} := g \quad , \quad g^{-1} := f$

واضح ده چې $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

په دې اساس $D_f = R_{f^{-1}} \quad , \quad D_{f^{-1}} = R_f$

یعنې په معکوس توابعو کې د تعریف ناحیې او د قیمتونو سیټ له یوه بل سره تعویض کېدای شي.

4 **مثال:** وښیئ چې $f(x) = 2x + 3$ او $g(x) = \frac{x-3}{2}$ توابع د یوه بل معکوس دي:

$$(f \circ g)(x) = f\left(g(x)\right) = 2g(x) + 3 = 2 \times \frac{x-3}{2} + 3 = x - 3 + 3 = x \Rightarrow (f \circ g)(x) = x$$

$$(g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right) = \frac{f(x) - 3}{2} = \frac{(2x+3) - 3}{2} = \frac{2x}{2} = x \Rightarrow (g \circ f)(x) = x$$

د معکوس تابع ترلاسه کول: هر تابع معکوس نلري، هغه توابع معکوس لري چې یو په یو وي، که f^{-1} د f تابع معکوس وي، د $y = f^{-1}(x)$ لپاره f^{-1} تابع له لاندې رابطې څخه ټاکل کیږي.

$$f(y) = x$$

ممکن یوه تابع یو په یو نه وي، د تعریف ناحیې په محدولو سره یې کولی شو په یو په یو تابع یې واړوو او معکوس تابع یې په ټاکل شوې ناحیه کې ترلاسه کړو.

5 **مثال:** د $f(x) = 2x^3 + 4$ تابع معکوس ترلاسه کړئ.

حل:

$$f(y) = x \Rightarrow 2y^3 + 4 = x \Rightarrow 2y^3 = x - 4 \Rightarrow y^3 = \frac{x-4}{2}$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{x-4}{2}} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x-4}{2}}.$$

6 **مثال:** د $g(x) = \frac{9}{5}x + 32$ تابع معکوس وټاکئ.

حل: فرضوو چې $y = g^{-1}(x)$ د $g(x)$ تابع معکوس وي، نو

$$g(y)=x \Rightarrow \frac{9}{5}y+32=x \Rightarrow y=\frac{5}{9}(x-32) \Rightarrow g^{-1}(x)=\frac{5}{9}(x-32)$$

7 **مثال:** د $f(x)=x^3-1$ تابع معکوس ترلاسه کړئ

حل: که f^{-1} د f تابع معکوس وي، نو

$$(f\circ f^{-1})(x)=x \Leftrightarrow f\left(f^{-1}(x)\right)=x \Leftrightarrow \left(f^{-1}(x)\right)^3-1=x$$
$$\Leftrightarrow \left(f^{-1}(x)\right)^3=x+1 \Leftrightarrow f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x+1}$$

8 **مثال:** د $g(x)=x^2$ تابع معکوس، د تعریف ناحیې په محدود کولو سره ترلاسه کړئ.

حل : دغه تابع په عمومي توګه یو په یو نه ده، نو ځکه معکوس هم نه ده، خو که تعریف ناحیه یې یوازې مثبت یا منفي اعداد وټاکل شي، بیا نو معکوس لري او فرضا $y=g^{-1}(x)$ د $g(x)$ تابع معکوس ده، نو

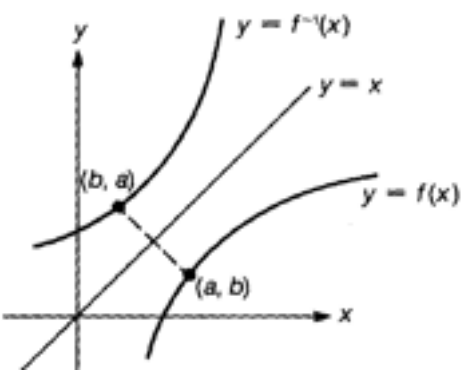
$$g(y)=x \Rightarrow y^2=x \Rightarrow y=\sqrt{x} \Rightarrow g^{-1}(x)=\sqrt{x}$$

9 **مثال:** د $h(x)=\frac{1}{x}$ تابع معکوس ترلاسه کړئ.

حل :
$$h(y)=x \Rightarrow \frac{1}{y}=x \Rightarrow y=\frac{1}{x} \Rightarrow h^{-1}(x)=\frac{1}{x}$$

لیدل کیږي چې دلته h او h^{-1} په یوه بل منطبق دي.

د معکوس توابعو ګراف: هغه توابع چې د یوه بل معکوس وي، ګرافونه یې نظر $y=x$ مستقیم ته متناظر دي(5.14 شکل).



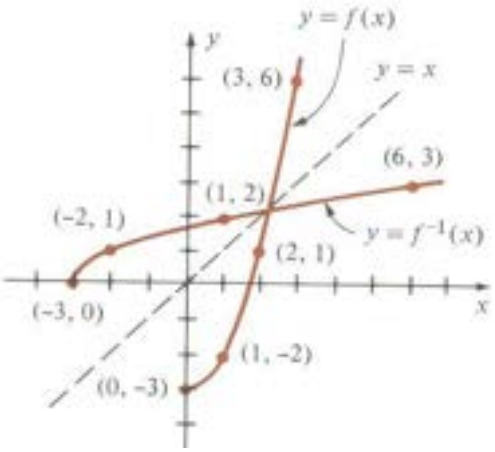
5.14 شکل

10 **مثال:** د $f(x)=x^2-3$ تابع معکوس ترلاسه کړئ او $y=f(x)$ او $y=f^{-1}(x)$ ګرافونه رسم کړئ.

حل: $f(x)=x^2-3$ تابع په عمومي توګه یو په یو نه ده او په دې اساس معکوس نلري، خو که د تعریف ناحیه یې $D_f=[3,\infty)$ په پام کې ونیسو، یو په یو حالت غوره کوي او هغه مهال معکوس هم لري چې په لاندې توګه ترلاسه کیږي:

$$f(y)=x \Rightarrow y^2-3=x \Rightarrow y^2=x-3 \Rightarrow y=\sqrt{x-3}$$

په دې اساس $f^{-1}(x)=\sqrt{x-3}$ ده. غوښتل شوي ګرافونه عبارت دي له(5.15 شکل).



5.14 شکل

5.6 د څېرکي لنډيز

له X سيټ څخه Y سيټ ته f تابع هغه رابطه ده چې له X څخه هر x عنصر ته يو او يوازې يو عنصر له Y څخه مربوط شي، x ته خپلواک متحول او y ته مربوط متحول وايي، x ته د f تابع په ذريعه د y انځور وايي او ليکي:

د f تابع د تعريف ناحيه: $D_f \equiv f(D_f)=\{x \in X : y=f(x), y \in Y\}$

د f تابع د قيمتونو سيټ: $R_f=\{y \in Y : y=f(x), x \in D_f\}$

د f تابع ګراف: $G(f)=D_f \times R_f=\{(x,y): y=f(x), x \in D_f\}$

د عمودي خط معيار: دوه مجهوله معادله يوه تابع ښيي، که چېرې هر عمودي خط اړونده ګراف يې په يوه نقطه کې قطع کړي.

د تابع د ګراف ليږدول: $y=f(x)+c$ ګراف د $y=f(x)$ ګراف عمودي ليږد دی.

د f او g توابعو مساوي والی: $f=g \Leftrightarrow D_f=D_g \wedge f(x)=g(x)$

جفت تابع: $\forall x \in D_f : f(-x)=f(x)$

تاق تابع: $\forall x \in D_f : f(-x)=-f(x)$

صريح(ښکاره) تابع: هغه تابع چې اړوند متحول يې د خپلواک متحول له جنسه لکه $y=f(x)$ ارائه شوی وي.

ضمني تابع: هغه تابع چې اړوند متحول، د خپلواک متحول له جنسه لکه $y = f(x)$ نه وي نبودل شوی.

د تابع پارامتریک حالت. $y = f(x)$ تابع چې پکې $x = \varphi(t)$ او $y = \psi(t)$ راکړل شوي وي.

متزايد تابع: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

متناقص تابع: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

یو په یو تابع: $f(x) \neq f(y) \Leftrightarrow x \neq y \quad \vee \quad f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

د افقي خط معیار: د x محور سره موازي مستقیم خط د یو په یو تابع ګراف یوازې په یوه نقطه کې قطع کوي.

ثابت تابع: تابع $f(x) = c$

خطي تابع: $f(x) = mx + b$ است

د طاقت تابع: $\alpha \in \mathbb{R}, f(x) = x^{\alpha}$

د مطلقه قیمت تابع: $f(x) = |x|$

نمائي تابع: $f(x) = a^x$ ، $a > 0$ و $0 < a \neq 1$

د اشاري تابع(سیګنال تابع): $sign(x) = \begin{cases} 1 & \Leftarrow \quad x > 0 \\ 0 & \Leftarrow \quad x = 0 \\ -1 & \Leftarrow \quad x < 0 \end{cases}$

د توابعو ترکیب f و g: $(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad , \quad (f \circ g)(x) = f(g(x))$

معکوس تابع: $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

د معکوس توابعو ترلاسه کول: $y = f^{-1}(x)$ له $f(y) = x$ رابطې څخه ترلاسه کیږي.

د معکوس توابعو ګراف: هغه توابع چې د یوه بل معکوس دي ګرافونه یې نظر $y = x$ مستقیم ته متناظر دي.

5.7 تمرین

1. د لاندې رابطو ګراف نظر قایم مختصاتو ته یې وټاکئ.

$$i.\ y = 3 \quad , ii.\ y = x \quad , \quad iii.\ y = 2x - 1$$

2. $f(0)$ ، $f(1)$ ، $f(a)$ او $f(a+b)$ قیمتونه په $f(x) = 2x + 1$ تابع کې ترلاسه کړئ.

3. $g(x) = 2x - \frac{1}{x}$ تابع په پام کې ونیسئ g(1) ، $g\left(\frac{1}{2}\right)$ ، g(a) او $g\left(\frac{1}{a}\right)$ ولیکئ.

4. $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ مقدار په لاندې توابعو کې ترلاسه کړئ.

$$i.\ f(x) = 8 \quad , \quad ii.\ f(x) = \frac{1}{x} \quad , \quad iii.\ f(x) = x$$

5. د لاندې توابعو د تعریف ناحیې وټاکئ.

$$f(x)=|x| \quad , \quad g(x)=3x+\frac{4}{x} \quad , \quad v(x)=\frac{1}{x}+\frac{2}{x-1}+\sqrt{3x-1}$$

6. $f(x)=2x-3$ او $g(x)=3x^2-1$ توابع په پام کې ونیسئ $f+g$ ، $f-g$ ، fg او $\frac{f}{g}$ یې ترلاسه کړئ.

7. $f_n=x^n$ تابع په پام کې نیسو جفت او تاق والی یې د f_1, f_2, f_3 و f_4 توابعو لپاره تشخیص کړئ.

8. جفت او تاق تواقع په لاندو بیلګو کې وټاکئ.

$$i.\ f(x)=4x^4-3x^2 \quad , \quad ii.\ g(x)=x^3-x \quad , \quad iii.\ h(x)=\frac{|x|}{x}$$

9. ثبوت کړئ چې لاندې توابع یو په یو دي.

$$i.\ f(x)=4x+7 \quad , \quad ii.\ g(x)=x^3 \quad , \quad iii.\ h(x)=\sqrt{x-1}$$

10. د $f(x)=3x^2-1$ او $g(x)=\frac{4x+1}{3}$ توابعو په پام کې نیولو سره، $f\circ g$ ، $g\circ f$ ، $f\circ f$ ، $g\circ g$ توابع ترلاسه کړئ.

11. $f(x)=\frac{9}{5}x+32$ او $g(x)=\frac{5}{9}(x-32)$ توابع، په پام کې نیسو، $f\circ g$ ، $g\circ f$ ، توابع یې ترلاسه کوو.

12. که چېرې $f(x)=\frac{16}{4-x^2}$ او $g(x)=\sqrt{x-1}$ وي، $(f\circ g)(2)$ ، $(g\circ f)(0)$ ، $(f\circ g)(1)$ او $(g\circ f)(1)$ اعداد د موجودیت په صورت کې یې ترلاسه کړئ.

13. د لاندې توابعو معکوس که چېرې موجود وي نو ترلاسه یې کړئ.

$$i.\ f(x)=4x+3 \quad , \quad ii.\ g(x)=2x^3-11 \quad , \quad iii.\ h(x)=x$$

$$iv.\ k(x)=5 \quad , \quad v.\ u(x)=\frac{1}{x+1} \quad , \quad vi.\ v(x)=\frac{5}{9}(x-32)$$

14. د $y=2x-3$ تابع ګراف رسم کړي، د هغه په مرسته د یادې تابع د معکوس تابع ګراف رسم کړئ.

15. که چېرې $f(x)$ تابع په $(-a\ ,\ a)$ انتروال کې د $a>0$ لپاره تعریف شوې وي، وښیئ چې $g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$ تابع جفت او $h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$ تابع تاق دی.

شپږم څپرکی

پولینومونه او ناطق توابع

د پولینومونو نظریه د ریاضیاتو مهم مبحث دی چې د مختلط اعدادو په چوکاټ کې جالبې قضیې او قواعد لري. په دې څپرکي کې پولینومي توابع او ځینې ځانګړتیاوې یې په لنډ ډول لوستل کیږي.

6.1 د پولینوم لومړني مفاهیم

که چېرې x یو حقیقي عدد او n یو طبیعي عدد وي، په دې صورت کې

$$x^n = \underbrace{xxx\cdots x}_{n\text{ځله}}$$

(ویل کیږي چې x په توان د n)، دلته x ته قاعده (بنسټ) او n ته توان (نما) وایي.

د m و n طبیعي اعدادو او x و y حقیقي اعدادو لپاره لاندې قواعد صدق کوي:

1. $x^m x^n = x^{m+n}$, 2. $\left(x^m\right)^n = x^{mn}$

3. $(xy)^n = x^n y^n$, 4. $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$, $m > n$

5. $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$, $y \neq 0$.

هره پاسینی اړیکه؛ په ترتیب سره د لاندې ټاکلو بېلګو په واسطه توضیح کېدای شي.

1. $x^3x^5 = (xxx)(xxxxx) = xxxxxxxx = x^8 = x^{3+5}$

2. $\left(x^2\right)^3 = x^2x^2x^2 = (xx)(xx)(xx) = xxxxxx = x^6 = x^{2.3}$

3. $(xy)^3 = (xy)(xy)(xy) = (xxx)(yyy) = x^3y^3$

4. $\frac{x^8}{x^3} = \frac{xxxxxxxx}{xxx} = xxxxx = x^5 = x^{8-3}$

5. $\left(\frac{x}{y}\right)^4 = \left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{x}{x}\right) = \frac{xxxx}{yyyy} = \frac{x^4}{y^4}$.

دا موضوع په نهم څپرکي کې په پراخه توګه تر بحث لاندې نیسو. دلته د اعدادو د طبیعي توانونو قاعدو پېژندل یوازې د پولینومونو د ضرب او تقسیم آسانه کول دي.

پولینوم: $P(x)$ پولینوم (پولینومي تابع) عبارت ده له

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

داسې چې a_0, a_1, a_2 او $a_n \neq 0$ حقيقي اعداد وي. n تام غير منفي عدد ته درجه ، a_0 ته ثابت حد a_n ته د $P(x)$ پولينوم موجه ضريب وايي.

$P(x) = ax + b$ لومړی درجه پولينوم يوه خطي تابع ده يعنې د $y = ax + b$ ګراف يو مستقيم خط دی چې ځانګړنې يې په دويم څېرکي کې مطرح شوي دي او دلته يې له تکراره مخنيوی کوو.

1 **مثال:** د $P(x) = x^2 - 5x + 6$ پولينوم قيمتونه په $x = -1$ ، $x = 0$ او $x = 2$ اعدادو کې عبارت دي له

$$P(-1) = (-1)^2 - 5(-1) + 6 = 12$$
$$P(0) = 0^2 - 5.0 + 6 = 6$$
$$P(2) = 2^2 - 5.2 + 6 = 0 \quad .$$

د دوو پولينومونو مساوي والي: دوه پولينومونو له يوه بل سره مساوي دي، يوازې که يوازې درجې يې له يوه بل سره مساوي وي او بيا د همدې مساوي درجه لرونکو حدونو ضرايب له يوه بل سره مساوي وي.

د پولينوم جذر: د x متحول ټول قيمتونه چې $P(x) = 0$ معادله صدق کړي صفري نقطې او يا د $P(x)$ پولينوم جذرونه بلل کيږي. په 1 مثال کې $x = 2$ او $x = 1$ اعداد د اړوند پولينوم جذرونه دي.

د پولينومونو جمع کول: په پولينومونو کې د جمع عمليه د مساوي توان لرونکو حدونو د ضرايبو له جمع کولو څخه منځته راځي.

2 **مثال:** د $P(x) = 4x^3 - 7x^2 + 5$ او $Q(x) = 2x^3 + 5x^2 + x - 2$ پولينومونو مجموع ترلاسه کړئ.

حل :

$$[P+Q](x) = P(x) + Q(x) = (4x^3 - 7x^2 + 5) + (2x^3 + 5x^2 + x - 2)$$
$$= (4x^3 + 2x^3) + (-7x^2 + 5x^2) + x + (5-2) = 6x^3 - 2x^2 + x + 3$$

د پولينومونو د جمع ځانګړتياوې: د $P(x)$ ، $Q(x)$ او $R(x)$ پولينومونو لپاره لرو چې:

1. $P(x) + Q(x) = Q(x) + P(x)$
2. $[P(x) + Q(x)] + R(x) = P(x) + [Q(x) + R(x)]$
3. $P(x) + 0 = P(x)$
4. $P(x) + [-P(x)] = 0$

د پولينومونو ضرب: د دوو پولينومونو په ضرب کې د $x^m \; x^n = x^{m+n}$ الجبري قاعدې په پام کې نيولو سره د پولينوم هر حد لومړی له دويم حد سره ضرب او بيا يې توانونه جمع کيږي.

3 **مثال:** $P(x) = x^2 - 7x + 4$ او $Q(x) = 5x^3 + x^2 - 2x$ پولينومونه له يوه بل سره ضرب کړئ.

حل :

$$P(x)\,Q(x)=\left(x^2-7x+4\right)\left(5x^3+x^2-2x\right)$$
$$=(5x^5+x^4-2x^3)+(-35x^4-7x^3+14x^2)+(20x^3+4x^2-8x)$$
$$\Rightarrow P(x)\,Q(x)=5x^5-34x^4+11x^3+18x^2-8x$$

په دويمه طريقه

$$\begin{array}{r} 5x^3+x^2-2x \\ \underline{x^2-7x+4} \\ 5x^5+x^4-2x^3 \\ -35x^4-7x^3+14x^2 \\ \underline{\qquad 20x^3+4x^2-8x} \\ 5x^5-34x^4+11x^3+18x^2-8x \end{array}$$

$$\Rightarrow P(x)\,Q(x)=5x^5-34x^4+11x^3+18x^2-8x$$

4 مثال: د $P(x)=2x-1$ او $Q(x)=7x^2-10x+4$ پولينومونو ضرب حاصل تر لاسه کړئ.

حل:

$$P(x)\,Q(x)=(2x-1)\left(7x^2-10x+4\right)$$
$$=(14x^3-20x^2+8x)+(-7x^2+10x-4)$$
$$=14x^3-27x^2+18x-4$$

د پولينومونو د ضرب قوانين: د $P(x)$ ، $Q(x)$ او $R(x)$ پولينومونو لپاره لرو چې:

1. $P(x)\,Q(x) = Q(x)\,P(x)$
2. $[P(x)\,Q(x)]\,R(x)=P(x)\,[Q(x)\,R(x)]$
3. $P(x)\,[Q(x)+R(x)]=P(x)\,Q(x)+P(x)\,R(x)$
3. $P(x).1 = P(x)$

د پولينومونو تقسيم: د پولينومونو د تقسيم عمليه د حقيقي اعدادو تقسيم په شان د يوه ځانګړي دستور مطابق ترسره کيږي چې دلته د څو مثالونو په راوړلو بسنه کوو. په تقسيم کې له $\frac{x^m}{x^n}=x^{m-n}$ قاعدې څخه استفاده کيږي، او که چيرې $P(x)$ په $D(x)$ پولينوم تقسيم شوی وي، خارج قسمت يې $Q(x)$ او باقيمانده يې $R(x)$ وي، په دې صورت کې $P(x)$ مقسوم، $D(x)$ مقسوم عليه، $Q(x)$ خارج قسمت او $R(x)$ باقيمانده ترمنځ لاندې اړيکه موجوده ده.

$$P(x)=Q(x).D(x)+R(x)\Leftrightarrow\frac{P(x)}{D(x)}=Q(x)+\frac{R(x)}{D(x)}$$

5 مثال: $P(x)=5+4x^3-3x$ پولينوم په $D(x)=2x-3$ تقسيموو:

حل:

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2+3x+3 \\
\hline
2x-3 & 4x^3+0x^2-3x+5 \\
 & \underline{\pm 4x^3 \mp 6x^2} \\
 & \quad 6x^2-3x \\
 & \quad \underline{\pm 6x^2 \mp 9x} \\
 & \qquad\quad 6x+5 \\
 & \qquad\quad \underline{\pm 6x \mp 9} \\
 & \qquad\qquad\quad 14=R
\end{array}
$$

په دې اساس $4x^3-3x+5 = (2x^2+3x+3)(2x-3)+14$

اويا $\dfrac{4x^3-3x+5}{2x-3} = 2x^2+3x+3+\dfrac{14}{2x-3}$

مثال: 6 $P(x)=x^3-8$ پولينوم په $D(x)=x-2$ تقسيم کړئ.

حل:

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2+2x+4 \\
\hline
x-2 & x^3+0x^2+0x-8 \\
 & \underline{\pm x^3 \mp 2x^2} \\
 & \quad 2x^2+0x-8 \\
 & \quad \underline{\pm 2x^2 \mp 4x} \\
 & \qquad\quad 4x-8 \\
 & \qquad\quad \underline{\pm 4x \mp 8}
\end{array}
$$

$$\Rightarrow x^3-8=(x^2+2x+4)(x-2) \Leftrightarrow \frac{x^3-8}{x-2}=x^2+2x+4$$

6.2 د عامل او باقيمانده قضيې

د باقيماندې قضيه: که چېرې $P(x)$ پولينوم په $x-a$ افاده تقسيم شي، د تقسيم باقيمانده د $P(a)$ عدد څخه عبارت ده.

ثبوت: فرضوو چې د $P(x)$ پولينوم او $x-a$ افادې د تقسيم خارج قسمت $Q(x)$ پولينوم او باقيمانده R عدد وي په دې صورت کې:

$$P(x)=(x-a)Q(x)+R$$

په وروستۍ اړيکه کې $x=a$ وضع کوو، ترلاسه کيږي چې:

$$P(a)=(a-a)Q(a)+R \Rightarrow P(a)=0\cdot Q(a)+R \Rightarrow P(a)=R \quad \bullet$$

1 **مثال:** که $P(x)=x^3-3x^2+2x+7$ پولینوم په $x-3$ افاده تقسیم شي باقیمانده عبارت ده له

$$P(3)=3^3-3.3^2+2.3+7=13$$

2 **مثال:** که چېرې $P(y)=y^3-125$ په $y-5$ تقسیم شي ، باقیمانده عبارت ده له

$$P(5)=5^3-125=0$$

د عامل قضیه: که د $P(x)$ پولینوم قیمت په $x=a$ کې صفر شي، یعنې $P(a)=0$ ، نو $P(x)$ په $x-a$ افاده پوره تقسیم کیږي($x-a$ افاده د $P(x)$ ضربي عامل دی).

ثبوت. که $P(x)$ په $x-a$ تقسیم شي د اسې چې خارج قسمت $Q(x)$ وي پوهیږو چې باقیمانده $P(a)=0$ ده، نو ځکه

- $P(x)=(x-a)Q(x)+P(a) \overset{P(x)=0}{\Rightarrow} P(x)=(x-a)Q(x)$

3 **مثال:** وښیئ چې $P(x)=x^2-5x+6$ پولینوم په $x-2$ او $x-3$ افادو د تقسیم وړتیا لري.

حل:

$$P(2)=2^2-5.2+6=0\ ,\ P(3)=3^2-5.3+6=0$$

په دې اساس $P(x)=x^2-5x+6$ په $x-2$ او $x-3$ افادو تقسیمیږي.

ترکیبي تقسیم (هورنر طریقه) : په $x-a$ افاده د $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ پولینوم تقسیم د ضریبونو په مرسته یې آسانه کیږي، د اسې چې د پولینوم ضریبونه په یوه کتار کې د a عدد مخې ته د لاندې جدول په توګه فهرست کوو او وروسته د a عدد او ضریبونو د ضرب له حاصل څخه د خارج قسمت پولینوم ترلاسه کیږي:

a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_2	a_1	a_0	a
	aa_n	$a\alpha_{n-1}$	...	$a\alpha_3$	$a\alpha_2$	$a\alpha_1$	
a_n	α_{n-1}	α_{n-2}	...	α_2	α_1	$\alpha_0=R=P(a)$	

د اسې حال کې چې

$$\alpha_0=a_0+a\alpha_1\ ,\ \alpha_1=a_1+a\alpha_2\ ,\ ...\ ,\ \alpha_{n-1}=a_{n-1}+aa_n$$

او $\alpha_n=a_n$ ، α_{n-1} ، α_{n-2} ، ... او α_1 اعداد د خارج قسمت پولینوم ضریبونه دي د اسې چې درجه یې یو واحد د $P(x)$ پولینوم له درجې څخه کمه وي او α_0 باقیمانده عدد دی.

4 **مثال:** $P(x)=2x^3+x^2-6x+9$ پولینوم په $x-3$ افاده تقسیم کړئ خارج قسمت او باقیمانده یې وټاکئ.

حل :

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -6 & 9 & (3 \\ & 6 & 21 & 45 & \\ \hline 2 & 7 & 15 & 54 & \end{array}$$

په دې اساس خارج قسم عبارت دی له $Q(x)=2x^2+7x+15$ څخه او باقیمانده عبارت ده له $R=54=P(3)$ څخه.

5 **مثال:** $P(x)=x^4-81$ پولینوم په $x-3$ افاده تقسیم کوو.

حل: پاسینی پولینوم عبارت دی له $P(x)=x^4+0x^3+0x^2+0x-81$

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -81 & (3 \\ & 3 & 9 & 27 & 81 & \\ \hline 1 & 3 & 9 & 27 & 0 & \end{array}$$

او باقیمانده یې صفر دی. $Q(x)=x^3+3x^2+9x+27$ خارج قسمت یې

6 **مثال:** $P(x)=2x^4+5x^3+4x+7$ پولینوم په $x+3$ افاده تقسیموو:

$$\begin{array}{ccccc|c} 2 & 5 & 0 & 4 & 7 & (-3 \\ & -6 & 3 & -9 & 15 & \\ \hline 2 & -1 & 3 & -5 & 22 & \end{array}$$

خارج قسمت $Q(x)=x^3-x^2+3x-5$

باقیمانده $R=22=P(-3)$

6.3 دویم درجه پولینومونه

دویم درجه پولینوم: $f(x)=ax^2+bx+c$ پولینومي توابع دویم درجه تابع(مربعي تابع) ګڼل کیږي، a ، b او c ضرایب یې حقیقي اعداد دي او $a\neq 0$ ده.

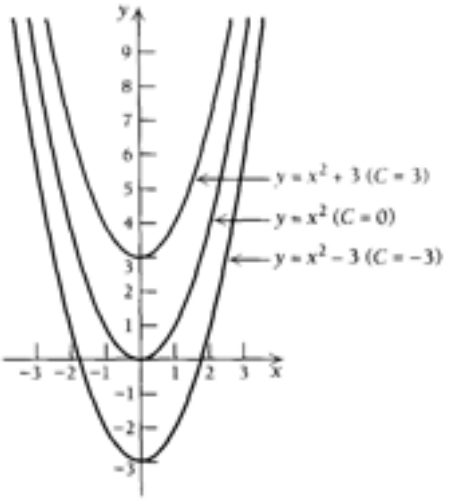
1 **مثال:** د $y=x^2+c$ ګراف په $c=0$ ، $c=3$ او $c=-3$ حالتونو کې رسم کړئ.

حل: تابع په $c=0$ حالت کې یعنې $y=x^2$ ، د څو ټاکلو قیمتونو په مرسته د جدول سره سم ترلاسه کوو:

دغه جدول په پام کې نیسو:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

او ګراف یې رسموو:



6.1 شکل

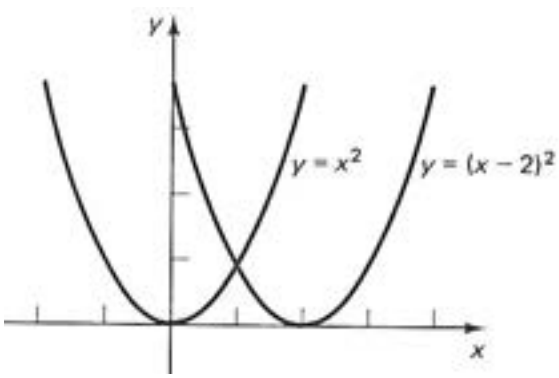
دغه ګراف د $y = x^2 + 3$ او $y = x^2 - 3$ حالاتو په اساس پاس لور او لاندې لور ته درې واحده لیږدول شوی(6.1 شکل).

2 **مثال:** د $y = (x-2)^2$ ګراف رسم کړئ او له $y = x^2$ ګراف سره یې پرتله کړئ.

حل : د تابع څو قیمتونه له لاندې جدول سره سم په پام کې نیسو:

x	0	1	2	3	4
y	4	1	0	1	4

لیدل کیږي چې $y = (x-2)^2$ ګراف د $y = x^2$ ګراف ښي لور ته 2 واحده افقي لیږد دی(6.2 شکل).

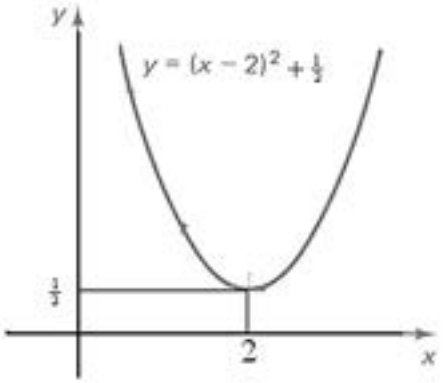


6.2 شکل

3 **مثال:** د $y = (x-2)^2 + \frac{1}{2}$ تابع ګراف رسم کړئ.

حل : بیا هم د څو قیمتونو جدول په لاندې توګه پام کې نیسو.

x	0	1	2	3	4
y	$\frac{9}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{2}$



6.3 شکل

لیدل کیږي چې ګراف د $y = x^2$ منحني د $x = 2$ افقي او $y = \frac{1}{2}$ عمودي لېږد څخه ترلاسه شوی یعنې راس یې $(2\ ,\ \frac{1}{2})$ نقطه ده(6.3 شکل).

عمومي حالت: اوس په عمومي توګه $f(x) = a(x-h)^2 + k$ دویم درجه تابع مطرح کوو او د مخکینې مثال سره یې پرتله کوو ، لیدل کیږي چې اعظمي یا اصغري نقطه یې عبارت ده له $(h\ ,k)$ څخه، خو د اعظمي او اصغري څرنګوالی د a په اشارې پورې اړه لري. اوس د $f(x) = ax^2 + bx + c$ تابع شکل ته بدلون ورکوو او په پاسینې حالت یې اړوو.

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c$$

$$\Rightarrow f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a} + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$$

په دې اساس

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

$f(x) = ax^2 + bx + c$ تابع د $f(x) = a(x-h)^2 + k$ شکل لپاره $k = \frac{4ac - b^2}{4a}$ او $h = \frac{-b}{2a}$ غوره کوي چې اړونده ګراف یې د $y = x^2$ ته ورته او انحنا یې $|a|$ پورې اړوند دی. برسېره پردې ګراف یې د h واحد په اندازې افقي او k واحد په اندازې سره عمودي لېږد لري او د پارابول راس (h,k) نقطه ده.

4 **مثال:** د $f(x)=x^2-4x+2$ پارابول، راس نقطه وټاکئ.

حل: د پارابول راس عبارت ده له (h,k) نقطې څخه، داسې چې

$$k=\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{8-16}{4}=-2 \text{ و } h=\frac{-b}{2a}=\frac{4}{2}=2$$

په دې اساس $(2\ ,\ -2)$ نقطه د پارابول راس دی.

6.4 د دویم درجه پولینوم صفري نقطې

که $f(x)=ax^2+bx+c$ تابع په پام کې ونیول شي او $f(x)=0$ وضع کړو، په دې صورت کې $ax^2+bx+c=0$ دویم درجه معادله ترلاسه کیږي او د دې معادلې جذرونه صفري نقطې یا د $f(x)$ تابع جذرونه ګڼل کیږي. یاده معادله کولی شو په لاندې توګه حل کړو.

$$ax^2+bx+c=0 \ \Rightarrow\ ax^2+bx=-c \ \Rightarrow\ x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow\ x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a} \ \Rightarrow\ \left(x+\frac{b}{a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$\Rightarrow\ x+\frac{b}{2a}=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \ \Rightarrow\ x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

په وروستي فورمول کې $D=b^2-4ac$ افاده د ممیزه یا (*discri min ant*) په نامه یادیږي او لاندې امکانات محتمل دي.

(الف). که $D>0$ وي؛ یاده معادله دوه بیلابیل حقیقي جذرونه لري،

(ب). که چېرې $D=0$ شي؛ معادله یوازې یو $x_0=\frac{-b}{2a}$ جذر لري، ځینې وخت وایي معادله یو مضاعف جذر لري.

(ج). که $D<0$ وي؛ معادله حقیقي جذر نلري، په دې حالت کې وایي معادله دوه مختلط جذرونه لري.

په ځینې مواردو کې د $ax^2+bx+c=0$ معادلې حل آسانه کیږي که $b=2b'$ یعنې $b'=\frac{b}{2}$ په پام کې ونیول شي، په دې صورت کې

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2b'\pm\sqrt{(2b')^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-2b'\pm\sqrt{4b'^2-4ac}}{2a}=\frac{2\left(-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}\right)}{2a}=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

په دې ترتیب

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{D'}}{a} \quad , \quad D' = b'^2 - ac$$

داسې چې D' او D معادلې ته په کتو، ورته ځانګړتیاوې لري. وروستۍ طریقه هغه مهال ګټوره ده چې b جفت عدد او یا مثلا $b = 2\sqrt{3}$ یا $b = 2\sqrt{5}$ او داسې نور وي.

یادونه: که د $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ اړیکې د ښي لور صورت او مخرج د صورت له مزدوج سره ضرب شي، نو لرو چې:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{\left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right)\left(-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}\right)}{2a\left(-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}\right)}$$

$$= \frac{(-b)^2 - (b^2 - 4ac)}{2a\left(-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}\right)} = \frac{4ac}{2a\left(-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}\right)} = \frac{2c}{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

په نتیجه کې د دویم درجه معادلې حل په لاندې توګه هم ښودل کیږي.

$$x = \frac{2c}{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

1 **مثال:** د لاندې توابعو د جذرونو ماهیت یې د اړوند ممیزو په مرسته وټاکئ.

$$i.\ f(x) = x^2 - 4x + 2 \quad , \quad ii.\ g(x) = \tfrac{1}{2}x^2 - x + \tfrac{1}{2}$$

$$iii.\ h(x) = x^2 - 6x + 10$$

حل: (i) د $f(x) = x^2 - 4x + 2$ تابع لپاره لرو چې

$$D = b'^2 - ac = (-2)^2 - (1)(2) = 4 - 2 = 2 > 0$$

په دې اساس $f(x)$ دوه بیلابیل جذرونه لري.

(ii). $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}$ تابع په پام کې نیسو:

$$D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4\left(\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{1}{2}\right) = 1 - 1 = 0$$

نو $g(x)$ یو حقیقي جذر لري.

(iii). د $h(x) = x^2 - 6x + 10$ تابع لپاره لیدل کیږي چې

$$D = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(1)(10) = 36 - 40 = -4 < 0$$

په دې اساس $h(x)$ تابع دوه مختلط جذرونه لري.

2 **مثال:** لاندې معادلې حل کړئ.

$$i.\ x^2 - 6x + 25 = 0 \quad , \quad ii.\ x^2 - 8x + 25 = 0$$

حل: $i.\ b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(1)(25) = 36 - 100 = -64$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{6\pm\sqrt{-64}}{2}=\frac{6\pm8\sqrt{-1}}{2}=\frac{6\pm8i}{2}=3\pm4i$$

$$x_1 = 3+4i \quad , \quad x_2 = 3-4i$$

$$ii.\quad D=b^2-4ac=(-8)^2-4(1)(25)=64-100=-36$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{8\pm\sqrt{-36}}{2}=\frac{8\pm6\sqrt{-1}}{2}=\frac{8\pm6i}{2}=4\pm3i$$

$$x_1 = 4+3i \quad , \quad x_2 = 4-3i$$

3 **مثال:** $x^2-2x-2\sqrt{3}-3=0$ معادله حل کړئ.

حل.

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{D'}}{a}=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-(1)(-2\sqrt{3}-3)}}{1}=1\pm\sqrt{1+2\sqrt{3}+3}$$

$$\Rightarrow x = 1\pm\sqrt{(1+\sqrt{3})^2} = 1\pm(1+\sqrt{3})$$

$$\Rightarrow x_1 = 2+\sqrt{3} \quad , \quad x_2 = -\sqrt{3}$$

4 **مثال:** $x^2-2\sqrt{3}x-9=0$ معادله حل کړئ.

حل: دلته ښه ده چې $b'=\frac{b}{2}=-\sqrt{3}$ په پام کې ونیول شي، په دې اساس

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{D'}}{a}=\frac{\sqrt{3}\pm\sqrt{(\sqrt{3})^2-(1)(-9)}}{1}=\sqrt{3}\pm\sqrt{12}=\sqrt{3}\pm2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow x_1 = \sqrt{3}+2\sqrt{3} \quad , \quad x_2 = \sqrt{3}-2\sqrt{3}$$

6.5 د دویم درجه پولینوم اعظمي او اصغري نقطې

$f(x)=ax^2+bx+c$ دویم درجه تابع معمولا پارابولا ته ورته شکل لري چې خوله یې پاس یا لاندې لور ته خلاصه وي داسې چې د $a>0$ لپاره د ګراف راس لاندې لور ته او د $a<0$ لپاره پاس لور ته وي. په دې اساس کولی شو وښیو چې $f(x)=ax^2+bx+c$ دویم درجه تابع په عمومي توګه

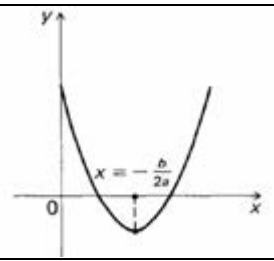
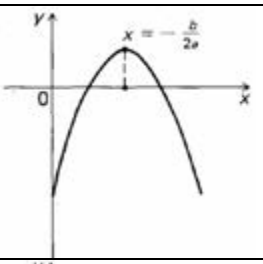
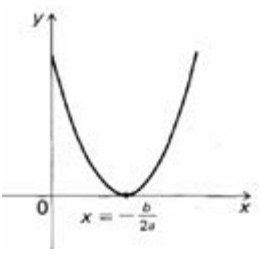
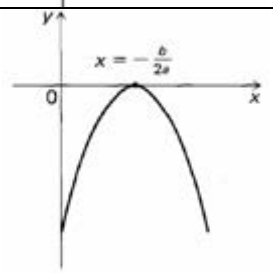
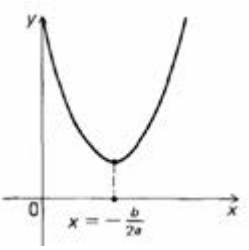
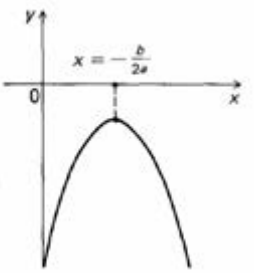
(الف). په $x_0=\frac{-b}{2a}$ نقطه کې اعظمي لري که چېرې $a<0$ وي.

(ب). په $x_0=\frac{-b}{2a}$ نقطه کې اصغري لري که چېرې $a>0$ وي.

او په دې حالاتو کې د x_0 لپاره د تابع قیمتونه عبارت دي له:

$$y_0=f(x_0)=f\left(\frac{-b}{2a}\right)=\frac{4ac-b^2}{4a}=-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

یعنې بحراني نقطه (اعظمي یا اصغري)، $(x_0\ ,\ y_0)$ نقطه ده (6.4 شکل).

$y = ax^2 + bx + c$	$a > 0$	$a < 0$
$b^2 - 4ac > 0$		
$b^2 - 4ac = 0$		
$b^2 - 4ac < 0$		

6.4 شكل

1 **مثال:** د $f(x) = x^2 - 2x - 3$ تابع ګراف رسم کړئ.

حل. (الف) له دې چې $a = 1 > 0$ دی، په دې اساس ګراف اصغري نقطه لري.

(ب) اصغري نقطه يې (h,k) ده، داسې چې:

$$h = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2} = 1 \quad , \quad k = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4(1)(-3) - (-2)^2}{4(1)} = -4$$

په دې اساس $(1,-4)$ نقطه يې اصغري نقطه ده.

(ج) د x محور سره تقاطع: ګراف x محور په داسې نقطه کې قطع کوي چې $y = 0$ وي او له دې چې

$$y = x^2 - 2x - 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = -1 , x_2 = 3$$

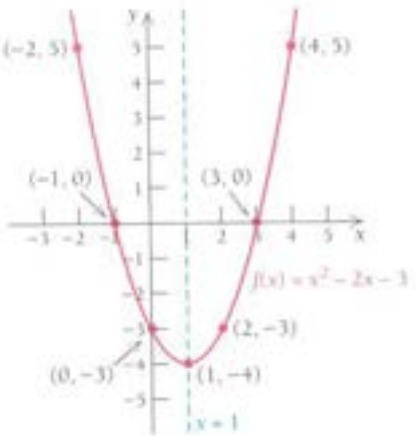
دی، نو ګراف x محور په دوو $(-1,0)$ او $(3,0)$ نقطو کې قطع کوي (6.5 شکل).

(د) د y محور سره تقاطع: ګراف y محور په $x = 0$ نقطه کې قطع کوي، نو ځکه $(0,-3)$ نقطه کې y محور قطع کيږي.

(هـ). د مخکینیو او اوس ترلاسه شویو نقطو څخه کولی شو لاندې جدول مرتب کړو.

x	1	0	2	3	4	-1	-2
y	-4	-3	-3	0	5	0	5

د پاسینیو پړاونو څخه د ترلاسه شوو نقطو په پام کې نیولو سره لاندې ګراف رسمیږي.



6.5 شکل

د دویم درجه توابعو معکوس: په عمومي توګه دویم درجه پولینومونه د یو په یو توابعو له ډلې څخه نه دي، نو معکوس هم نلري، خو که چېرې د تعریف ناحیې یې د بحراني نقطې ښې یا کېڼ لور ته محدود شي دغه توابع معکوس منونکې کیږي او د $f(x) = ax^2 + bx + c$ تابع معکوس په لاندې توګه ترلاسه کیږي:

$$f(y) = x \Rightarrow ay^2 + by + c = x \Rightarrow ay^2 + by + c - x = 0$$

$$\Rightarrow y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a(c-x)}}{2a} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a(c-x)}}{2a}$$

په دې ترتیب $f(x)$ په دوو معکوس لرونکو تابع منشعب کیږي او د هر یوې معکوس یې له دوو منفي او مثبت اشارو څخه مطابقت کوي.

6.6 د پولینوم جذرونو عمومي ځانګړنې او ډولونه

د دویم درجه توابعو په مبحث کې ولیدل شول چې یوه درجه دویم تابع کولی شي دوه مختلط جذرونه او یا یو مضاعف جذر او یا هم دوه حقیقي جذرونه ولري، ورته ځانګړتیا هر پولینوم لري، یعنې د یوې پولینومي تابع جذرونه کېدای شي حقیقي، مختلط او یا تکراري وي.

قضیه. که چېرې $z = a + bi$ مختلط عدد د یوې پولینومي تابع یو جذر وي، مزدوج یې یعنې $\bar{z} = a - bi$ هم د همدې تابع جذر دی (د دې قضیې ثبوت زمونږ د بحث له محدودې وتلې موضوع ده)

د الجبر اساسي قضيه: هره n درجه $(n \geq 1)$ ، پولينومي تابع، چې حقيقي او يا مختلط ضريبونه ولري، لږ تر لږه يو (حقيقي او يا مختلط) جذر لري.

قضيه. که چېرې r_1 ، r_2 ، r_3 ، ... او r_n د

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

پولينوم جذرونه وي، په دې صورت کې $P(x)$ پولينوم کېداى شي په لاندې توګه تجزيه کړو.

$$P(x) = \alpha(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)\cdots(x - r_n)$$

ثبوت: له دې چې r_1 ، r_2 ، r_3 ، ... او r_n اعداد، $P(x)$ پولينوم صفر کوي، نو د عامل قضيې په اساس $x - r_1$ ، $x - r_2$ ، $x - r_3$ ، ... او $x - r_n$ افادې د $P(x)$ ضربي عوامل دي، په دې اساس

$$P(x) = a_n (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) + \cdots + (x - r_n)$$

که ټول پاسيني عوامل له يوه بل سره ضرب شي او د اصل پولينوم سره پرتله شي، ترلاسه کوو چې $a_n = \alpha$ دى، په دې اساس:

$$P(x) = \alpha(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) + \cdots + (x - r_n)$$

قضيه: هره n درجه $(n \geq 1)$ ، پولينومي تابع، n حقيقي او يا مختلط جذرونه لري (ممکن ځينې جذرونه له يوه بل سره مساوي وي).

ثبوت: د اساسي او عامل قضيې له ترکيب څخه ترلاسه کيږي.

قضيه : که چېرې x_1 ، x_2 ، x_3 ، ... و x_n د

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

پولينوم جذرونه وي، په دې صورت کې د پولينوم جذرونو او ضريبونو ترمنځ لاندې اړيکې موجودې دي:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n & = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\ x_2 x_1 + x_3 x_2 + \cdots + x_n x_{n-1} & = \frac{a_{n-2}}{a_n} \\ x_3 x_2 x_1 + x_4 x_3 x_2 + x_5 x_4 x_3 + \cdots + x_n x_{n-1} x_{n-2} & = -\frac{a_{n-3}}{a_n} \\ \cdots & \\ x_1 x_2 x_3 \cdots x_n & = (-1)^n \frac{a_0}{a_n} \end{cases}$$

ثبوت: پوهيږو چې $p(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \ldots (x - x_n)$ دي، که په ښي لوري کې قوسونه له يوه بل سره ضرب کړو او د $P(x)$ پولينوم له ضريبونو سره يې پرتله کړو غوښتل شوى اصل ترلاسه کيږي.

مثال 1. که چېرې x_1 ، x_2 او x_3 د $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

پولينومي تابع جذرونه وي، په دې صورت کې:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a} \\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=\frac{c}{a} \\ x_1x_2x_3=-\frac{d}{a} \end{cases}$$

2 **مثال:** که x_1 او x_2 د $P(x)=ax^2+bx+c$ پولینوم جذرونه وي، نو

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\frac{b}{a} \\ x_1x_2=\frac{c}{a} \end{cases}.$$

3 **مثال:** هغه دریم درجه پولینوم ولیکئ چې جذرونه یې $x_1=2$ ، $x_2=3$ او $x_3=5$ وي.

حل:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=2+3+5=10 \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=2.3+2.5+3.5=31 \\ x_1\ x_2\ x_3=30 \end{cases}$$

په دې اساس غوښتل شوی پولینوم عبارت دی له:

$$P(x)=x^3-10x^2+31x-30$$

4 **مثال:** که چېرې x_1 ، x_2 ، x_3 او x_4 د

$$P(x)=x^4+4x^3-19x^2-46x+120$$

څلورم درجه پولینوم جذرونه وي، د پولینوم د ضریبونو او جذرونو ترمنځ اړیکې عبارت دي له:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_3=-4 \\ x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=-19 \\ x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4 \ = \ 46 \\ x_1\ x_2\ x_3\ x_4=120 \end{cases}$$

د دکارت اشارې قاعده: د $P(x)$ مرتب معیاري پولینوم د مثبت حقیقي جذرونو شمېر د $P(x)$ ضریبونو د اشارو له بدلون او یا تر هغه وړ یوه جفت عدد سره مساوي دی او د $P(x)$ پولینوم د منفي حقیقي جذرونو شمېر د $P(-x)$ ضریبونو د اشارو د بدلون څخه یا یو تر وړ جفت عدد څخه عبارت دی.

5 **مثال:** د لاندې پولینوم د منفي او مثبت ممکن جذرونو شمېر وټاکئ:

$$P(x)=2x^5-4x^4+3x^2+5x-7$$

حل: پولینوم په ټوله کې د لومړي او دویم، دویم او دریم، څلورم او پنځم حدونو تر منځ د اشارې دریې بدلونونه لري، په دې اساس $P(x)=0$ معادله 1 او یا 3 مثبت جذرونه لري نو

$$P(-x)=2(-x)^5-4(-x)^4+3(-x)^2+5(-x)-7$$

$$\Rightarrow p(-x)=-2x^5-4x^4+3x^2-5x-7$$

په همدې توګه $p(-x)$ د دويم او دريم، دريم او څلورم حدونو ترمنځ د اشارې دوه بدلونونه لري، په دې اساس د $p(x)=0$ معادلې منفي جذرونه 2 يا 0 سره مساوي دي.

د نسبتي جذرونو قضيه: که چېرې $\frac{a}{b}$ نه اختصار کېدونکی نسبتي عدد، د تام ضريبونو لرونکي پولينوم $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_0$ جذر وي، نو a د a_0 ضربي عامل او b د a_n ضربي عامل ګڼل کېږي.

دغه قضيه د دې امکان ورکوي څو د پولينومي معادلو نسبتي جذرونه د اړوند پولينوم د لومړي او وروستي ضريبونو ضربي عواملو په مرسته وپلټل شي.

مثال: د $3x^3+4x^2+2x-4=0$ معادلې احتمالي نسبتي جذرونه ليست کړئ او له هغه ډلې 6 اصلي جذر يې وټاکئ.

حل: د دستور له مخې د غوښتل شوي جذر صورت د 4- عدد ضربي عوامل دي يعنې ±1 ، ±2 ، ±4 او مخرج يې د 3 عدد ضربي عوامل يعنې ±3 , ±1 اعداد دي، په دې اساس احتمالي جذرونه يې عبارت دي له: ±1 ، $\pm\frac{1}{3}$ ، ±2 ، $\pm\frac{2}{3}$ ، ±4 و $\pm\frac{4}{3}$ ، څخه، او له دې چې $P\left(\frac{2}{3}\right)=0$ دی، نو $\frac{2}{3}$ عدد يې غوښتل شوی جذر ګڼل کېږي.

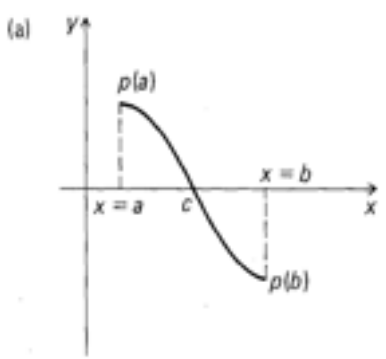
په عمومي توګه د پولينومي معادلو حل په اړه: لکه څرنګه چې د دويم درجه معادلو د حل په طريقو پوهيږو همدې طريقو ته ورته دريم درجه معادلو لپاره(د کاردانو طريقه) او د څلورم درجه معادلې د حل لپاره(فيرراري طريقه) موجود ده، دغه ميتودونه که څه هم په تيوري کې د معادلاتو جذرونه، د ضريبونو له جنسه د ښودلو وړ بولي، خو دغه ادعا په عمل کې عام فهم نه ده او د تطبيق وړتيا نلري.

د پنځم درجه او تر هغه لوړې درجه معادلو د حل قضيې د دوو رياضي پوهانو(دان ابل او ګالوا) په نامه ثبوت شوي چې وايي:

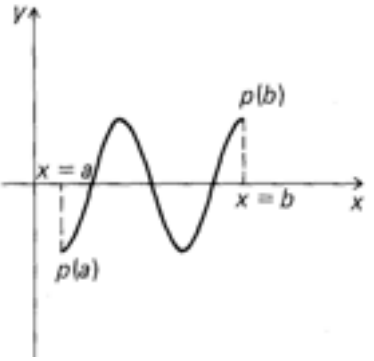
پنځم درجه او تر هغه د لوړو درجو پولينومي معادلو جذرونه نشو کولی د ضريبونو له جنسه يې وښيو: په دې اساس هغه کلي طريقه چې د ضريبونو له جنسه د پولينومي معادلې حل وښييي(د لومړی او دويم درجه معادلو څخه پرته) نورې موجودې نه دي او د دريم او څلورم درجه معادلو د حل ميتود هم په ټولو مواردو کې عملي نه دي او د تطبيق وړتيا نلري، نو يوازې د تيوري تر حده محدود پاتيږي. په دې اساس پولينومي معادلې په تقريبي او عددي شمېرنو په اساس حل کوي چې دلته يې له ډېر تفصيل څخه ډډه کېږي.

په انتروالونو کې د جذرونو موجوديت: (1). که چېرې د $P(x)$ پولينوم قيمتونه په a او b اعدادو کې بيلابيلې اشارې ولري يعنې $P(a)P(b)<0$ وي، په دې صورت کې په (a,b) انتروال موجود جذرونه تاق اعداد دي او دغه شمېر لږ تر لږه يو دی(6.5 شکل) او(6.6 شکل).

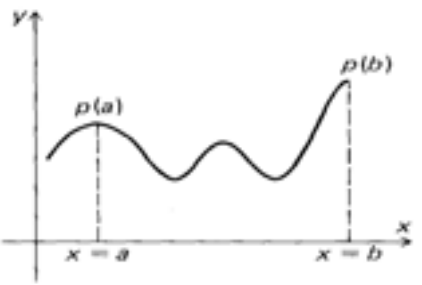
(2). که چېرې د پولینوم قیمتونه په اعدادو کې هم اشاره یعنې $P(a)P(b) > 0$ وي، نو په انتروال کې د پولینوم د جذرونو شمېر یو جفت عدد او یا صفر عدد دی(6.7 شکل).
(1) او (2) ادعا ګانې د لاندې فرضي ادعا ګانو په ذریعه تائید کېدای شي.



6.6 شکل



6.5 شکل



6.7 شکل

6.7 ناطق توابع

د پولینومي توابع مجموع، تفاضل، حاصل ضرب ېې برته پولینومي توابع دي، خو هغه توابع چې د پولینومي توابعو له تقسیم څخه ترلاسه کېږي په عمومي توګه پولینومونه نه دي، دغه توابع د ناطق یا نسبتي توابع په نامه یادېږي. البته پولینومي توابع د ناطق توابعو ځانګړی حالت دی، چې په مخکیني بحث کې مو اشاره ورته وکړه. د ناطق تابع تحولات او د ګراف رسمول یې په یوولسم څپرکي(د مجانبونو په مبحث) کې مطرح کېږي. په دې بحث کې د توابعو انقسام څېړو:

د ناطق تابع پېژندل: که چېرې $P(x)$ او $Q(x)$ دوې پولینومي تابع ګانې وي ،

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad , \quad Q(x) \neq 0$$

تابع د ناطق(نسبتي) تابع په نامه یادېږي، طبعا د دې توابعو د تعریف ناحیه هغه حقیقي اعداد دي چې مخرج یې صفر نکړي د $Q(x) = 1$ لپاره $f(x)$ تابع یو پولینوم دی، په بل عبارت دغه پولینومونه د ناطق توابعو ځانګړی حالت دی.

قسمي کسرونه: که چېرې $f_1(x)$ ، $f_2(x)$ ، $f_3(x)$ ، ... او $f_n(x)$ ناطق توابع وي، داسې چې

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+\cdots+f_n(x)$$

په دې صورت کې $f_1(x)$ ، $f_2(x)$ ، $f_3(x)$ ، ... او $f_n(x)$ ته د $f(x)$ قسمي کسرونه (اړونده اجزا) وايي.

د کسرونو مجموع ترلاسه کول د کسري افادو جمع کولو عملیې ته ارجاع کیږي، خو د دې مسالې معکوس یعنې که چېرې اصلي کسر راکړل شوی وي او قسمي کسرونه یې غوښتل شوي وي، د دې بحث اصلي موضوعات دي. که د کسر صورت درجه د کسر د مخرج له درجې څخه لوړه وي، په مخرج د صورت له تقسیم وروسته، دغه کسر د یوه پولینوم او یوه عادي کسر د مجموع په توګه ښودل کیږي. د ساري په توګه:

$$\frac{x^5+3x^3-1}{x^3+2}=x^2+3+\frac{-2x^2-7}{x^3+2}$$

هغه کسرونه چې د صورت درجه یې د مخرج له درجې څخه ټیټه ده، د عادي کسرونو په نامه یادیږي. دلته زموږ ټول پام په قسمي کسرونو د عادي کسرونو انقسام ته متمرکز دی.

1 **مثال:** لاندې بېلګه په پام کې نیسو:

$$\frac{-x+8}{x^2-7x+12}=\frac{4}{x-4}-\frac{5}{x-3}$$

د ښي لور کسرونو د حاصل جمع څخه د کېڼ لور کسر ترلاسه کیږي، څرنګه کولی شو د کېڼ لور له اصلي کسر څخه اړونده قسمي کسرونه یې ترلاسه کړو؟

د کسرونو انقسام (په قسمي کسرونو تجزیه): که چېرې $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ یوه ناطق او عادي تابع (عادي کسر) وي، یعنې د $P(x)$ پولینوم درجه د $Q(x)$ پولینوم له درجې څخه ټیټه وي، نو لومړی: د $Q(x)$ مخرج هر $(ax+b)^k$ فکتور ته په k اندازه $\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(ax+b)^k}$, $k=1,2,3,\cdots$ قسمي کسرونه مطابقت کوي، داسې چې A_1 ، A_2 ، A_3 ، ... او A_n یې ثابت اعداد دي.

دویم: د مخرج هر $(ax^2+bx+c)^k$ فکتور ته د $\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{A_kx+B_k}{(ax^2+bx+c)^k}$ قسمي کسرونو په څېر k کسرونه مطابقت کوي، داسې چې A_1 ، A_2 ، A_3 ، ... ، A_k ، B_1 ، B_2 ، B_3 ، ... او B_k یې ثابت اعداد دي.

د دوو پاسینیو حالاتو په پام کې نیولو سره، اصلي کسر د څو فرعي کسرونو په توګه مطرح کیږي او اړونده ضرایب یې ټاکل کیږي، البته ممکن په هرو یاد شوو حالاتو کې $k=1$ شي.

2 **مثال:** $\frac{x+1}{x^2-x-6}$ کسر په قسمي کسرونو تجزيه کوو.

حل. تر هرڅه مخکې مخرج په ممکنه فکتورونو تجزيه کوو:

$$\frac{x+1}{x^2-x-6}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-3}=\frac{A(x-3)+B(x+2)}{(x+2)(x-3)}$$

د پاسيني مساوات د ښي او کيڼ لور له پرتله کولو وروسته بايد صورتونه په يوه بل منطبق وي، په دې اساس A او B اعداد بايد وټاکل شي. $x+1 \equiv A(x-3)+B(x+2)$

که په وروستۍ اړيکه کې $x=3$ او $x=-2$ وضع کړو، ترلاسه کيږي چې:

$$\begin{cases} x=3 \Rightarrow 3+1=A.0+B.5 \Rightarrow 4=5B \Rightarrow B=\frac{4}{5} \\ x=-2 \Rightarrow -2+1=A(-5)+B.0 \Rightarrow -1=-5A \Rightarrow A=\frac{1}{5} \end{cases}$$

په دې اساس $\frac{x+1}{x^2-x-6}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x+2}+\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{x-3}$

دويمه طريقه: کولی شو د صورتونو له پرتله کولو څخه A او B په لاندې توګه وټاکو:

$$x+1 \equiv A(x-3)+B(x+2)$$
$$\Rightarrow x+1\equiv (A+B)x-3A+2B$$

له دې ځايه لاندې دوه مجهوله معادلې ترلاسه کيږي:

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -3A+2B=1 \end{cases} \Rightarrow A=\frac{1}{5} \quad , \quad B=\frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{x+1}{x^2-x-6}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x-2}+\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{x-3}$$

3 **مثال:** $\frac{x^2-x+1}{x^3+2x^2+x}$ کسر، په قسمي کسرونو تجزيه کړئ.

حل. د مخرج په تجزيه کولو سره، کسر د دريو کسرونو د مجموع په توګه مطرح کيږي:

$$\frac{x^2-x+1}{x^3+2x^2+x}=\frac{x^2-x+1}{x(x+1)^2}\equiv\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2-x+1}{x^3+2x^2+x}\equiv\frac{A(x+1)^2+Bx(x+1)+cx}{x^3+2x^2+x}$$

$$x^2-x+1\equiv A(x+1)^2+Bx(x+1)+cx$$

$$\begin{cases} x=0 \Rightarrow A=1 \\ x=-1 \Rightarrow C=-3 \\ x=1 \Rightarrow 1=4A+2B+C \Rightarrow B=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2-x+1}{x^3+2x^2+x}=\frac{1}{x}-\frac{3}{(x+1)^2}$$

په دويمه طريقه د دواړو خواوو له پرتله کولو څخه کولی شو د رڼ مجهولـه معـادلاتي سيسـتم ترلاسه کړو چې له حل وروسته يې A، B او C ټاکل کيږي.

4 **مثال:** $\frac{x^2-2x-3}{(x-1)(x^2+2x+2)}$ کسر په قسمي کسرونو منقسم کړئ.

حل. د مخرج په تجزيه کولو سره، کسر د دوو کسرونو د مجموع په توګه مطرح کيږي:

$$\frac{x^2-2x-3}{(x-1).(x^2+2x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+2}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2-2x-3}{(x-1)(x^2+2x+2)}=\frac{A(x^2+2x+2)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+2x+2)}$$

$$\Rightarrow x^2-2x-3\equiv A(x^2+2x+2)+(Bx+C)(x-1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=1\Rightarrow -4=5A \quad \Rightarrow \quad A=-\frac{4}{5} \\ x=0\Rightarrow -3=2A-C\Rightarrow C=\frac{7}{5} \\ x=-1\Rightarrow 0=A+2B-2C\Rightarrow B=\frac{9}{5} \end{cases}$$

په پايله کې $\frac{x^2-2x-3}{(x-1).(x^2+2x+2)}=\frac{-4}{5(x-1)}+\frac{9x+7}{5(x^2+2x+2)}$

5 **مثال:** $\frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}$ کسر په قسمي کسر تجزيه کړئ.

حل. لرو چې

$$\frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}$$

د کسرونو له هم مخرج کولو او د دواړو خواوو له مقابل کولو وروسته لرو چې:

$$2x^2+3=(Ax+B)(x^2+1)+(Cx+D)$$

$$\Rightarrow 2x^2+3=Ax^3+Bx^2+(A+C)x+(B+D)$$

په دې اساس لاندې معادلاتي سيستم ترلاسه کيږي:

$$\begin{cases} A=0 \\ B=2 \\ A+C=0 \\ B+D=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=2 \\ C=0 \\ D=1 \end{cases}$$

په دې اساس $\frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}=\frac{2}{x^2+1}+\frac{1}{(x^2+1)^2}$

6.8 د څپرکي لنډيز

پولينوم $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0\ ,\ n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$

د پولينوم جذرونه. د x متحول ټول قيمتونه چې $P(x)=0$ معادله صدق کوي، صفري نقطې يا د $P(x)$ پولينوم جذرونه بلل کيږي.

باقيمانده قضيه. که چېرې $P(x)$ پولينوم په $x-a$ افاده تقسيم شي، د تقسيم باقيمانده عبارت دی له $P(a)$ عدد څخه.

عامل قضيه. که چېرې د $P(x)$ پولينوم قيمت په $x=a$ کې صفر شي، يعنې $P(a)=0$ ، نو ويلی شو چې $P(x)$ په $x-a$ افاده پوره تقسيم کيږي($x-a$ افاده د $P(x)$ ضربي عامل دی).

دويم درجه تابع. $f(x)=ax^2+bx+c\equiv a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$

د دويم درجه تابع د ګراف راس. $(h\ ,\ k)=\left(-\frac{b}{2a}\ ,\ \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$

د دويم درجه معادلو جذرونه. $ax^2+bx+c=0\Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}\ ,\ D=b^2-4ac$

(الف). که $D>0$ وي؛ يا ده معادله دوه حقيقي جذرونه لري.

(ب). که چېرې $D=0$ شي؛ معادله يو $x_0=\frac{-b}{2a}$ جذر لري، ځينې مهال وايي يو مضاعف جذر لري.

(ج). په هغه صورت کې چې $D<0$ وي؛ معادله هيڅ حقيقي جذر نلري نو په دې حالت کې ويل کيږي چې معادله دوه مختلط جذرونه لري.

د دويم درجه تابع د ګراف اعظمي او اصغري. $f(x)=ax^2+bx+c$ تابع په عمومي توګه په $x_0=\frac{-b}{2a}$ نقطه کې اعظمي لري که چېرې $a<0$ وي او $x_0=\frac{-b}{2a}$ کې اصغري لري که $a>0$ وي.

* که چېرې $z=a+bi$ مختلط عدد د پولينومي تابع يو جذر وي، مزدوج يې يعنې $\bar{z}=a-bi$ هم د همدې تابع جذر دی.

* که چېرې r_1 ، r_2 ، r_3 ، ⋯ او r_n د

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

پولينوم جذرونه وي، په دې صورت کې $P(x)$ کولی شو داسې تجزيه کړو:

$$P(x)=\alpha(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)\cdots(x-r_n)$$

* که چېرې n درجه پولينومي تابع $(n\geq 1)$ ، n حقيقي يا مختلط جذرونه ولري(ممکن ځينې جذرونه له يوه بل سره مساوي وي).

* که چېرې $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$ د x_1 ، x_2 ، x_3 ،... او x_n

پولينوم جذرونه وي، په دې صورت کې د پولينوم د جذرونو او ضريبونو ترمنځ لاندې اړيکې موجودې دي:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n & =-\frac{a_{n-1}}{a_n} \\ x_2x_1+x_3x_2+\cdots+x_nx_{n-1} & =\frac{a_{n-2}}{a_n} \\ x_3x_2x_1+x_4x_3x_2+x_5x_4x_3+\cdots+x_nx_{n-1}x_{n-2} & =-\frac{a_{n-3}}{a_n} \\ \cdots & \\ x_1x_2x_3\cdots x_n & =(-1)^n\frac{a_0}{a_n} \end{cases}$$

د دکارت اشاره يي قضيه. د $P(x)$ مرتب معياري پولينوم د مثبت حقيقي جذرونو شمېر د $P(x)$ د ضريبونو د اشارو له بدلون او يا تر هغه وړ يوه جفت عدد سره مساوي دی او د $P(x)$ پولينوم د منفي حقيقي جذرونو شمېر د $P(-x)$ ضريبونو د اشارو د بدلون له شمېر څخه يا يو تر يې وړ جفت عدد څخه عبارت دی.

د پولينومي معادلو د حل په اړه. د پنځم درجه او تر هغه لوړ درجه لرونکو معادلو حل نشو کولی د ضريبونو له جنسه يې وښيو.

ناطق تابع(نسبتي تابع). که چېرې $P(x)$ او $Q(x)$ پولينومونه وي، $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ تابع، د ناطق(نسبتي) تابع په نامه يادېږي.

قسمي کسرونه. که چېرې $f_1(x)$ ، $f_2(x)$ ، $f_3(x)$ ، ⋯او $f_n(x)$ ناطق توابع وي داسې چې

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+\cdots+f_n(x)$$

په دې صورت کې $f_1(x)$ ، $f_2(x)$ ، $f_3(x)$ ، ⋯او $f_n(x)$ ته د $f(x)$ قسمي کسرونه (اجزا) وايي.

د کسرونو انقسام(په قسمي کسرونو تجزيه). که چېرې $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ يوه عادي ناطق تابع (عادي کسر) وي، يعنې د $P(x)$ پولينوم درجه د $Q(x)$ پولينوم له درجې څخه ټيټه وي:

لومړی. د $Q(x)$ مخرج هر $(ax+b)^k$ فکتور ته k لاندې قسمي کسرونه مطابقت کوي

$$\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(ax+b)^k}\ ,\ k=1,2,3,\cdots$$

داسې چې A_1 ، A_2 ، A_3 ، ⋯ او A_n ، ثابت اعداد وي.

دويم. د مخرج هر $(ax^2+bx+c)^k$ فکتور ته، k لاندې قسمي کسرونه

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{A_kx+B_k}{(ax^2+bx+c)^k}$$

مطابقت کوي داسې چې، A_1 ، A_2 ، A_3 ، ⋯ ، A_k ، B_1 ، B_2 ، B_3 ، ⋯ او B_k يې ثابت اعداد دي.

6.9 تمرين

1. a_0 ، a_2 ، a_3 ، ... او a_n ضريبونه په لاندې پولينومونو کې وټاکئ.

$i.\quad P(x)=2x+7 \quad , \quad ii.\quad P(x)=x^4+1$

$iii.\quad P(x)=\sqrt{2}x^3-8x+9 \quad , \quad iv.\quad P(x)=-9$

$v.\quad P(x)=x^5-2x^4+3x^3+x^2-5x+6$

2. په لاندې توابعو کې پولينومي توابع وټاکئ.

$i.\quad P(x)=x+\sqrt{7} \quad , \quad ii.\quad P(x)=\sqrt{x}+7 \quad , \quad iii.\quad P(x)=\frac{2}{x}+9x^3$

$iv.\quad P(x)=0 \quad , \quad v.\quad P(x)=x^3+2x^2+1 \quad , \quad vi.\quad P(x)=2^x$

3. په لاندې پولينومونو کې ورکړل شوي قيمتونه وشمېرئ.

$i.\quad P(x)=x^3+6x^2-2x+8 : \quad P(0), P(1), P\left(\sqrt{2}\right)$

$ii.\quad P(x)=\frac{x^3}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x}{4}-\frac{1}{5} \quad : \quad P(0), P(1), P(4)$

4. $P(x)$ او Q(x) پولينومونه راکړل شوي ؛ $P(x)\pm Q(x)$ يې ترلاسه کړئ.

$i.\quad P(x)=x+7 \quad , \quad Q(x)=x^2-7x-5$

$ii.\quad P(x)=x^4-1 \quad , \quad Q(x)=3x^3-7x^2+5x$

5. لاندې حاصل ضربونه ترلاسه کړئ.

$i.\quad (x+4)(x-4) \quad , \quad ii.\quad (4x^2+2x+1)(2x-1)$

$iii.\quad (x^2+2)(2x^2+3x-4) \quad , \quad vi.\quad x(x^2+1)(x^2-1)$

6. که $P(x)$ مقسوم او $D(x)$ مقسوم علیه وي، $Q(x)$ خارج قسمت او $R(x)$ باقیمانده يې ترلاسه کړئ:

$i.\quad P(x)=4x^4-5x^3+7x^2+x+3 \quad , \quad D(x)=4x^2$

$ii.\quad P(x)=3x^3-10x^2-21x-26 \quad , \quad D(x)=x-2$

$iii.\quad P(x)=4x^3-8x^2+x-2 \quad , \quad D(x)=x-1$

7. د باقیمانده قضیې په کارولو سره که چېرې $P(x)$ په $D(x)$ تقسیم شوی وي، د تقسیم باقیمانده د تقسیم له عملیې څخه پرته ترلاسه کړئ.

$i.\quad P(x)=7x^{10}-3x^3+1 \quad , \quad D(x)=x+1$

$ii.\quad P(x)=13x^{25}+4x^{13}-5 \quad , \quad D(x)=x-1$

8. c داسې وټاکئ چې کـه چېرې $P(x)=x^2-4x+9$ پـه $D(x)=x+c$ تقسـيم شـي نـو باقيمانده يې $R=4$ ترلاسه شي.

9. $P(x)$ پولينومونه داسې حال کې چې $D(x)$ فکتور يې ورکړل شوی وي د عامل قضيې په مرسته يې تجزيه کړئ.

$i.\quad P(x)=x^3-4x^2+x-5 \quad , \quad D(x)=x+2$

$ii.\quad P(x)=2x^4+5x^3-2x^2-4x+2 \quad , \quad D(x)=x-\frac{1}{2}$

10. k داسې وټاکئ چې $D(x)=x+1$ د لاندې پولينوم يو فکتور وي:

$$P(x)=x^3+3x^2+kx+1$$

11. د ترکيبي تقسيم په کارولو سره د تقسيم لاندې عمليې ترسره کړئ.

$i.\quad (x^4-5x^3+6x^2+4x-8)\div(x-2)$

$ii.\quad (6x^3-7x^2+1)\div\left(x+\frac{1}{3}\right)$

$iii.\quad (x^5+a^5)\div(x+a)$

12. له لاندې اعدادو څخه د $P(x)$ پولينوم جذرونه وټاکئ.

$i.\quad P(x)=2x^3-2x^2-12 \quad : \quad 2 \ , 1$

$ii.\quad P(x)=x^3-2x^2-31x+20 \quad : \quad -5 \ , \frac{7}{2}$

$iii.\quad P(x)=x^2+4x+1 : -2+\sqrt{3} \ , -2-\sqrt{3}$

13. لاندې دويم درجه توابع په $P(x)=a(x+h)^2+k$ توګه وليکئ او اړوند ګراف يې رسم کړئ.

14.
$i.\quad P(x)=x^2-6x-3 \quad , \quad ii.\quad P(x)=-2x^2-4x+1$

$iii.\quad P(x)=x^2-5x+4x \quad , \quad iii.\quad P(x)=-x^2+5x-4$

15. د لاندې معادلو جذرونه د تکميل مربع په مرسته ترلاسه کړئ.

$i.\quad x^2-3x+4=0 \quad , \quad ii.\quad -2x^2-4x+1=0$

$iii.\quad -3x^2-9x=-4 \quad , \quad iv.\quad \frac{1}{3}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}=0$

16. د لاندې معادلو د جذرونو څرنګوالی د $D=b^2-4ac$ مميزې په پام کې نيولو سره وټاکئ.

$i.\quad x^2+5x-6=0 \quad , \quad ii.\quad x^2-6x+25=0$

$iii.\quad x^2-8x+25=0 \quad , \quad iv.\quad 1+2x+2x^2=0$

17. د لاندې دويم درجه توابع د ګرافونو راسکيچ وټاکئ.

$i.\ f(x)=-5x^2-14x-8$ ، $ii.\ f(x)=4x^2-9$

$iii.\ f(x)=x^2+3$ ، $iv.\ f(x)=2x^2-6x+3$

18. وښيئ چې $P(x)$ په ورکړل شوو انتروالونو کې لږ تر لږه یو جذر لري:

$i.\ P(x)=x^3-3x+1$ ، $(1\ ,\ 3)$

$ii.\ P(x)=x^3-2x^2-5x+6$ ، $(-3\ ,\ 4)$

$ii.\ P(x)=2x^3+x^2-8x-4$ ، $(-1\ ,\ 0)$

19. لاندې معادلې حل کړئ.

$i.\ 3x^2+27=0$ ، $ii.\ -5x^2+4x+12=0$

$iii.\ x^2+2x+2=0$ ، $iv.\ 4x^2-16x+25=0$

20. د لاندې پولینومونو جذر تر لاسه کړئ.

$i.\ P(x)=(x-2)(x-7)$ ، $ii.\ P(x)=(x-2)^2(x+1)$

$ii.\ P(x)=7(x-3)(x-5)$ ، $ii.\ P(x)=(x^2-9)(x^2+9)$

21. د $P(x)=x^3-5x^2-3x-7$ پولینوم د مثبت او منفي جذرونو شمېر وټاکئ.

لاندې کسرونه په قسمي کسرونو تجزیه کړئ:

22. $\dfrac{1}{x^2-4}$ ، 23. $\dfrac{2x^2+3}{x(x-1)^2}$ ، 24. $\dfrac{1}{x(x^2+x+1)}$ ، 25. $\dfrac{2x^2+1}{(x^2-x+1)^2}$

26. $\dfrac{x^3+5x^2+2x-4}{x(x^2+4)^2}$ ، 27. $\dfrac{x+2}{x^3+x^2-6x}$ ، 28. $\dfrac{3x^2-10x+14}{(x+1)(x-2)^2}$

29. $\dfrac{x^4-x^3+2x^2-x+2}{(x-1)(x^2+2)^2}$ ، 30. $\dfrac{7x^3-29x^2+46x-35}{(x-3)^2(x^2+2)}$

اووم څپرکی
نمائي او لوګارتمي توابع

هغه توابع چې د اعدادو او متحولینو د جمع، ضرب او تقسیم په پایله کې منځته راځي، الجبري توابع دي، خو هغه توابع چې الجبري نه وي د ترانساندانت توابع(متعالي توابع) په نامه یادیږي، نمائي(اکسپونشیل) توابع، لوګارتمي توابع او مثلثاتي توابع ترانساندانت ډوله توابع دي.
نمائي توابع او لوګارتمي توابع د یوه بل معکوس دي او د نمائي توابع له ځانګړتیاوو څخه، د نفوس د ډېریدو په وړاندوینه، د میکروبونو په تکثیر، د اوبو د ذېرو تبخیر، د اجسامو خوسا کېدنې، د رادیواکتیف عناصرو تشعشع او داسې نورو کې استفاده کېږي. له لوګارتمي توابعو څخه په پېچلو شمېرنو او حتی د ریاضیکي قضایاوو په اثبات، د فزیک مسایلو حل او داسې نورو کې ګټه اخیستل کیږي. په دې برخه کې نمائي او لوګارتمي توابع په لنډ ډول لولو.

7.1 د اعدادو توانونه

د هغه اعدادو اصول چې توانونه یې طبیعي، تام او ناطق اعداد وو، د ښوونځي په درسي پروګرامونو کې مطرح شوې وو او دلته یې یوازې په یادولو یې اکتفا کوو. دغه اصول حقیقي اعدادو ته پراختیا مومي. که چېرې m او n طبیعي اعداد وي، په دې صورت کې

1. $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$
2. $x^m \div x^n = x^{m-n}$, $x \neq 0$, $m > n$
3. $(x^m)^n = x^{mn}$

پاسینۍ درې قاعدې د مثبت توانونو لپاره مطرح شوي دي او 2 قاعده یوازې هغه مهال ثبوت کېدای شي چې m له n څخه غټ وي.
صفري توان: د 2 قاعدې مطابق، $x \neq 0$ لپاره لرو چې $x^4 \div x^4 = x^{4-4} = x^0$ ، له بل پلوه پوهیږو چې $x^4 \div x^4 = 1$ دی، په دې اساس $x^0 = 1$ ترلاسه کیږي، دغه فرضیه په لاندې مناسب تعریف منتج کیږي.

تعریف 1: $\boxed{x^0 := 1 \ , \ x \neq 0}$

یادونه کوو چې $x^4 \div x^4 = x^{4-4}$ اړیکه ثبوت کېدونکې نه ده، له دې پلوه صفري توان یوازې تعریف کوو.

1 مثال:

$$i.\quad x^n \cdot x^0 = x^{n+0} = x^n \quad , \quad x^n \cdot x^0 = x^n \cdot 1 = x^n$$
$$ii.\quad x^n \div x^0 = x^{n-0} = x^n \quad , \quad x^n \div x^0 = x^n \div 1 = x^n$$

$$iii.\quad (x^0)^n = x^{0\cdot n} = x^0 = 1 \quad , \quad (x^0)^n = 1^n = 1$$

منفي توانونه: بياهم كه د $x \neq 0$ لپاره د 2 قاعدې مطابق وليکو چې $x^2 \div x^8 = x^{2-8} = x^{-6}$ ، پوهيږي چې $x^2 \div x^8 = \frac{1}{x^6}$ دی، په دې اساس $x^{-6} = \frac{1}{x^6}$ ترلاسه کيږي، يعنې لاندې تعريف توجيه کېدونکی دی.

تعريف 2 : $$x^{-n} = \frac{1}{x^n} \quad , \quad x \neq 0 \quad , n \in \mathbb{N}$$

له دې څخه پايله اخلو $$x^n = x^{0-(-n)} = \frac{x^0}{x^{-n}} = \frac{1}{x^{-n}}$$

2 مثال:

$$i.\quad x^5 \cdot x^{-3} = x^{5-3} = x^2 \quad , \quad x^5 \cdot x^{-3} = x^5 \cdot \frac{1}{x^3} = x^2$$

$$ii.\quad x^4 \div x^{-2} = x^{4-(-2)} = x^6 \quad , \quad x^4 \div x^{-2} = x^4 \cdot \frac{1}{x^{-2}} = x^4 \cdot x^2 = x^6$$

$$iii.\quad (x^{-6})^3 = x^{(-6)(3)} = x^{-18} \quad , \quad (x^{-6})^3 = \left(\frac{1}{x^6}\right)^3 = \frac{1}{x^{18}} = x^{-18}$$

3 مثال:

$$i.\quad (8.0123)^0 + 10^{-2} = 1 + \frac{1}{10^2} = 1 + \frac{1}{100} = 1 + 0.01 = 1.01$$

$$ii.\quad 10^3 + 3\cdot 10^2 + 8\cdot 10^1 + 4\cdot 10^0 = 1000 + 300 + 80 + 4 = 1384$$

$$iii.\quad 5\cdot 10^3 + 4\cdot 10^2 + 3\cdot 10^1 + 2\cdot 10^0 + 2\cdot 10^{-1} + 3\cdot 10^{-2} = 5432.23$$

د اعدادو جذرونه: كه چېرې n طبيعي عدد، $n \neq 1$ ، $x \geq 0$ او $y \geq 0$ وي، داسې چې:

$$y^n = x$$

په دې صورت کې y ته د x عدد n مرتبه جذر (n-ام جذر) وايي او ليکو چې $y = \sqrt[n]{x}$

په بل عبارت $$y^n = x \Leftrightarrow y = \sqrt[n]{x}$$

که څه هم $y^n = x$ مساوات، په دې صورت کې چې x مثبت او n جفت وي، د y دوو قيمتونو ته (يو مثبت او يو منفي عدد) صدق کوي، خو د يوه عدد مثبت جذر ته اصلي جذر ويل کيږي او معمولا ليکي چې: $$\sqrt[n]{x^n} = |x| \ , \ n = 2k \ , k \in \mathbb{N}$$

يعنې د x^n عدد اصلي n مرتبه جذر عبارت دی له $|x|$ څخه. د ساري په توګه $\sqrt[4]{16} = 2$ او $\sqrt{25} = 5$ دي. د دا شان $\sqrt{25} = \pm 5$ يا $\sqrt[6]{64} = \pm 2$ اړيکو ليکل بالکل غلط کار دی. د منفي x عدد لپاره n مرتبه جذر هغه مهال مفهوم لرونکی دی چې n تاق عدد وي. دلته $\sqrt[n]{x^n} = x$ په پام کې نيول کيږي.

$$\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} |x| \ , \ n = 2k \quad , \quad k \in \mathbb{N} \\ x \ , \ n = 2k+1 \quad , \quad k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

کسري توانونه: که n يو طبيعي عدد ، $x > 0$ او $x \neq 1$ وي، په دې صورت کې ليکو چې:

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x = x^1 = x^{\frac{n}{n}} = x^{\frac{1}{n}.n} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n$$

په دې اساس بايد $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ په پام کې ونيول شي. په پايله کې د دوو m او n طبيعي اعدادو لپاره لرو چې

$$x^{\frac{m}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m$$

او يا

$$x^{\frac{m}{n}} = \left(x^m\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$$

يادونه که x منفي عدد وي، د $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$ مساوات سهي والي شرط دا دی چې m او n بايد گډ فکتور ونلري. کنه بيا لاندې ستونزه راولاړيږي:

$$8 = \sqrt{64} = \sqrt{(-2)^6} = (-2)^{\frac{6}{2}} = (-2)^3 = -8$$

ضمنا

$$2 = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{(-2)^4} = (-2)^{\frac{4}{4}} = (-2)^1 = -2$$

4 مثال:

$$i.\ (1000)^{\frac{4}{3}} = \left(\sqrt[3]{1000}\right)^4 = 10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10000$$

$$ii.\ (0.0001)^{\frac{3}{4}} = \left(\sqrt[4]{0.0001}\right)^3 = \left(\sqrt[4]{\tfrac{1}{10000}}\right)^3 = \left(\tfrac{1}{10}\right)^3 = 0.001$$

$$iii.\ (-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = -2 \quad , \quad iv.\ (-1)^{\frac{1}{7}} = \sqrt[7]{-1} = -\sqrt[7]{1} = -1$$

د اعدادو حقيقي توانونه: که چېرې a او b مثبت اعداد او x و y حقيقي اعداد وي، نو

$$I.\ a^x a^y = a^{x+y} \quad , \quad II.\ \left(a^x\right)^y = a^{xy} \quad , \quad III.\ \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \quad , \quad IV.\ (ab)^x = a^x b^x$$

$$V.\ \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x} \ , \ b \neq 0 \quad , \quad VI.\ a^x = a^y \Leftrightarrow x = y \quad , \quad VII.\ a^x = b^x \Leftrightarrow a = b$$

دلته پاسيني اړيکې لږ تر لږه د x او y نسبي قيمتونو ته ثبوت ورکړای شي. د ساري په توګه که $x = \frac{p}{q}$ او $y = \frac{r}{s}$ فرض شي، په دې صورت کې

$$a^x a^y = a^{\frac{p}{q}} a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{ps}{qs}} a^{\frac{qr}{qs}} = \sqrt[qs]{a^{ps}}\ \sqrt[qs]{a^{qr}} = \sqrt[qs]{a^{ps}\ a^{qr}}$$

$$= \sqrt[qs]{a^{ps+qr}} = a^{\frac{ps+qr}{qs}} = a^{\frac{ps}{qs}+\frac{qr}{qs}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}} = a^{x+y}$$

5 **مثال:**

$$i.\ \left(5^{\frac{1}{3}}\right)\left(5^{\frac{1}{4}}\right) = 5^{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}} = 5^{\frac{7}{12}} \quad , \quad ii.\ \left(\sqrt[3]{7}\right)^{\frac{1}{5}} = \left(7^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{5}} = 7^{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}} = 7^{\frac{1}{15}}$$

$$iii.\ \sqrt[3]{\sqrt{x}} = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{x} \quad , \quad iv.\ \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}} = x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{6}} \ .$$

6 **مثال:** $2^{2x+3} - 33(2^x) + 4 = 0$ **معادله حل کوو:**

$$2^{2x+3} - 33.(2^x) + 4 = 0 \Rightarrow 2^3\left(2^x\right)^2 - 33\left(2^x\right) + 4 = 0$$

د $y = 2^x$ په تعويض سره لرو چې:

$$8y^2 - 33y + 4 = 0 \Rightarrow y = \frac{-(-33) \pm \sqrt{(-33)^2 - 4\cdot 8\cdot 4}}{2\cdot 8}$$

په دې اساس

$$\begin{cases} y_1 = 4 \Rightarrow 2^x = 2^2 \Rightarrow x_1 = 2 \\ y_2 = \frac{1}{8} \Rightarrow 2^x = 2^{-3} \Rightarrow x_2 = -3 \end{cases}$$

د توانونو عمومي قواعد لکه څرنګه چې د ناطق او طبيعي اعدادو لپاره صدق کوي، حقيقي اعدادو ته هم صادق دي.

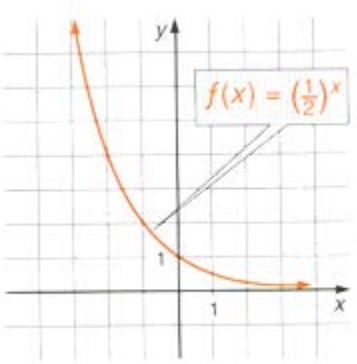
7.2 نمائي توابع

کـه چېـرې a د 1 خـلاف يـو مثبـت عـدد وي، $f(x) = a^x$ تـابع، a قاعـده لرونکـې نمـايي (اکسپونشيل) تابع نومېږي. ځينې مهال ليکي: $\exp_a x = a^x$

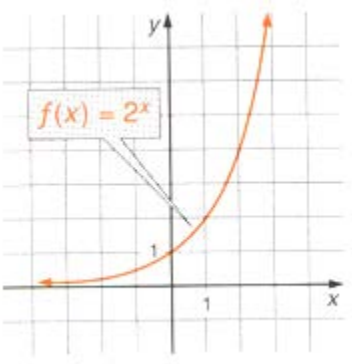
د اکسپونشيل تابع د تحول تحليل لپاره لاندې دوې بيلګې په پام کې نيسو:

1 **مثال:** $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ او $g(x) = 2^x$ توابع په پام کې نيسو او اړوند ګرافونه يې رسموو:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$g(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$f(x)$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$



شکل 7.2



شکل 7.1

د نمائي توابعو ځانګړتيا: که چېرې a يو مثبت عدد او $f(x) = a^x$ وي نو:

(الف) f تابع متزايد ده مشروط په دې چې $a > 1$ وي. (7.1 شکل).

(ب) f تابع متناقص ده که چېرې $a < 1$ وي. (7.2 شکل).

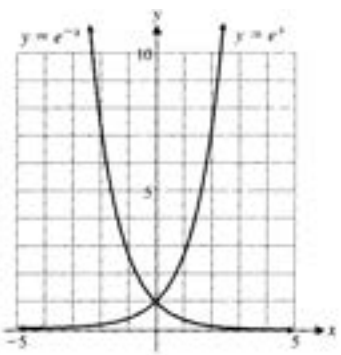
(ج) او f تابع د $a = 1$ لپاره، $f(x) = 1$ (يوه ثابت تابع ده).

(د) په هر حالت کې د $y = a^x$ ګراف له $(0, 1)$ نقطې څخه تېريږي.

د اويلر عدد: په رياضياتو کې يو ترټولو ډېر مهم عدد $e = 2.718\,281\,828\,4\cdots$ دی، دغه عدد د اويلر عدد په نامه يادېږي او $f(x) = e^x$ تابع، د طبيعي اکسپونشيل تابع په نامه يادېږي او کله، کله يې داسې ليکي:

$$\exp(x) = e^x$$

دغه تابع د نفوس ډېرېدو، د ميکروبونو په تکثير، د اوبو د ذېرمو کموالي او زياتېدو او داسې نورو مسايلو کې ډېره استعماليږي. د $y = e^x$ تابع ګراف، $y = 2^x$ تابع ته ورته رسميږي. (7.3 شکل).



7.3 شکل

ښکاره خبره ده چې e^x هم a^x ته ورته ځانګړنې لري:

$$e^0 = 1 \quad , \quad e^x e^y = e^{x+y} \quad , \quad e^x \div e^y = e^{x-y}$$

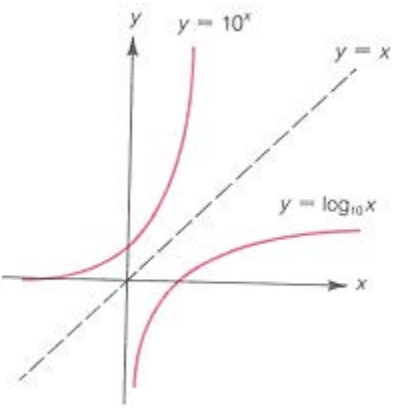
$y = e^x$ تابع متزايد او $y = e^{-x}$ تابع متناقص ده. د اويلر عدد او کارونو په اړه يې د توابعو ليمت په باب کې ډير معلومات درکوو.

7.3 لوګارتم او لوګارتمي توابع

که چېرې $x = a^y$ او $1 \neq a > 0$ وي، په دې صورت کې y عدد ته په x قاعده د x عدد لوګارتم وايي او ليکي $y = \log_a x$ ، نو پاسيني دوه عبارتونه له يوه بل سره معادل دي، يعنې

$$x = a^y \Leftrightarrow y = \log_a x$$

په دې اساس $f(x) = a^x$ او $f^{-1}(x) = \log_a x$ توابع د يوه بل معکوس دي. (7.4 شکل).



7.4 شکل

مثال: 1 $1 = 7^0 \Leftrightarrow \log_7 1 = 0$, $8 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$, $8 = 2^3 \Leftrightarrow \log_2 8 = 3$

$100 = (0.1)^{-2} \Leftrightarrow \log_{0.1} 100 = -2$, $10000 = 10^4 \Leftrightarrow \log_{10} 10000 = 4$

$0.001 = (0.1)^3 \Leftrightarrow \log_{0.1} 0.001 = 3$, $0.001 = 10^{-3} \Leftrightarrow \log_{10} 0.001 = -3$

د نمائي او لوګارتمي توابعو ترمنځ اړيکي: له دې چې $f(x) = a^x$ او $f^{-1}(x) = \log_a x$ توابع د يوه بل معکوس دي او:

$$a^{\log_a x} = f(f^{-1}(x)) = x \quad , \quad \log_a a^x = f^{-1}(f(x)) = x$$

په دې اساس $\boxed{a^{\log_a x} = x \quad , \quad \log_a a^x = x}$

د لوګارتم ځانګړنې: د a ، b ، x ، y مثبت اعدادو او α حقيقي عدد لپاره لاندې ځانګړنې صدق کوي:

$i.\ \log_a 1 = 0$, $ii.\ \log_a a = 1$, $iii.\ \log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$

$iv.\ \log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$, $v.\ \log_a (x^\alpha) = \alpha \log_a x$

$vi.\ \log_{a^\alpha} x = \frac{1}{\alpha}\log_a x\ ,\ \alpha \in \mathbb{R}\quad ,\quad vii.\ (\log_a x)(\log_b a) = \log_b x$

$viii.\ (\log_b a)(\log_a b) = 1\quad ,\quad ix.\ x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$

$x.\ \log_a x = \log_b x \Rightarrow a = b\ ,\ xi.\ \log_a x = \log_a y \Rightarrow x = y$

ثبوت

$i.\ 1 = a^0 \Rightarrow \log_a 1 = 0\ ,\ ii.\ a = a^1 \Rightarrow \log_a a = 1$

$iii.\ \begin{cases} \log_a x = u \Rightarrow x = a^u \\ \log_a y = v \Rightarrow y = a^v \end{cases} \Rightarrow xy = a^u a^v \Rightarrow xy = a^{u+v}$

$\Rightarrow \log_a(xy) = u + v = \log_a x + \log_a y$

$iv.\ \begin{cases} \log_a x = u \Rightarrow x = a^u \\ \log_a y = v \Rightarrow y = a^v \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{a^x}{a^y} \Rightarrow \frac{x}{y} = a^{u-v}$

$\Rightarrow \log_a \frac{x}{y} = u - v = \log_a x - \log_a y$

$v.\ \log_a x = u \Rightarrow x = a^u \Rightarrow x^\alpha = (a^u)^\alpha$

$\Rightarrow x^\alpha = a^{\alpha u} \Rightarrow \log_a x^\alpha = \alpha u = \alpha \log_a x$

$vi.\ \log_a x = u \Rightarrow x = a^u \Rightarrow x^\alpha = a^{\alpha u} \Rightarrow x^\alpha = (a^\alpha)^u \Rightarrow \log_{a^\alpha} x^\alpha = u$

$\Rightarrow \alpha \log_{a^\alpha} x = \log_a x \Rightarrow \log_{a^\alpha} x = \frac{1}{\alpha}\log_a x$

$vii.\ \begin{cases} \log_a x = u \Rightarrow x = a^u \\ \log_b a = v \Rightarrow a = b^v \end{cases} \Rightarrow x = (b^v)^u \Rightarrow x = b^{uv} \Rightarrow \log_b x = uv = \log_a x \log_b a$

$viii.\ \log_b a \times \log_a b = \log_b b = 1$

$ix.\ x^{\log_a y} = \left(y^{\log_y x}\right)^{\log_a y} = y^{\log_y x \times \log_a y} = y^{\log_a x}$

$x.\ \log_a x = u = \log_b x \Rightarrow a^u = x = b^u \Rightarrow a = b$

$xi.\ \log_a x = u = \log_a y \Rightarrow x = a^u = y \Rightarrow x = y$ •

مثال: 2

$i.\ \log_2 18 = \log_2(2\cdot 9) = \log_2 2 + \log_2\left(3^2\right) = 1 + 2\cdot\log_2 3$

$ii.\ \log_2 128 = \log_2(2^7) = 7\log_2 2 = 7\cdot 1 = 7$

$iii.\ \log_b\left(\frac{xy}{z}\right) = \log_b(xy) - \log_b z = \log_b x + \log_b y - \log_b z$

$iv.\ \log_b 4 + \log_b x - \log_b 3 = \log_b(4x) - \log_b 3 = \log_b\left(\frac{4x}{3}\right)$

$v.\ \log_2 \sqrt{11} = \log_2 (11)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log_2 11$

$vi.\ \log_b\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{2}{3}\left(\log_b x - \log_b y\right)$

پايله: له vi،v اړيکو څخه ښکاري چې

$$\log_{a^\beta} x^\alpha = \frac{\alpha}{\beta}\log_a x$$

3 **مثال:** لاندې لوګارتمي معادله حل کړئ:

$$\log_{10}[(x-21)x] = 2 \Rightarrow (x-21)x = 10^2 \Rightarrow x^2 - 21x - 100 = 0$$
$$(x-25)(x+4) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 25 \quad , \quad x_2 = -4$$

4 **مثال:** لاندې لوګارتمي معادله حل کړئ.

$$\log_{10} x + \log_{10} 4 = 2 \Rightarrow \log_{10}(4x) = 2 \Rightarrow 4x = 10^2 \Rightarrow x = 25.$$

7.4 اعشاري لوګارتم (معمولي لوګارتم)

په دې لوګارتم کې (10) عدد د قاعدې په توګه په پام کې نیول کیږي او معمولا $\log_{10} x$ په $\log x$ شکل لیکي، یعنې:

$$\log x = \log_{10} x$$

1 **مثال:** د ځینو اعدادو معمولي لوګارتم په لاندې ډول فهرست کوو:

x	0.001	0.01	0.1	1	10	100	1000
$\log x$	−3	−2	−1	0	1	2	3

د لوګارتم مانتیس او مشخصه: هر x مثبت عدد کولی شو په علمي توګه داسې ولیکو

$$x = a.10^c$$

داسې چې $1 \le a < 10$ وي او c یو تام عدد وي. په دې صورت کې

$$\log x = \log(a.10^c) = \log a + \log 10^c = \log a + c\log 10 = \log a + c$$

دلته c عدد ته د $\log x$ عدد مشخصه (کرکترستیک) او $m = \log a$ ته یې مانتیس وایی. له دې چې $1 \le a < 10$ دی، نو $0 \le \log a < 1$ کیږي، یعنې $\boxed{0 \le m < 1}$.

2 **مثال:**

$i.$ $\log(527) = \log\lfloor (5.27)\times 10^2 \rfloor = \log(5.27) + 2 \Rightarrow c = 2\,, m = \log(5.27)$

$ii.$ $\log(95000) = \log\lfloor (9.5)\times 10^4 \rfloor = \log(9.5) + 4 \Rightarrow c = 4\,, m = \log(9.5)$

$iii.$ $\log(0.00005) = \log(5\times 10^{-5}) = \log 5 - 5 \quad \Rightarrow c = -5 \quad , \quad m = \log 5$

$iv.$ $\log(1000) = \log 10^3 = 3\log 10 = 3 \quad \Rightarrow \quad c = 3 \quad , \quad m = 0$

د مانتیس او مشخصې ځانګړنې

(1) هغه اعداد چې عین رقم او ترتیب لري د لوګارتم مانتیس یې د اعشاري علامې او د ښي او کین لور صفرنو پرته، له یوه بل سره مساوي دي. د ساري په توګه $\log(4.81) = 0.6821$ دی خو:

$$i.\quad \log(48100) = \log\lfloor (4.81)\times 10^{4} \rfloor = \log(4.81) + \log 10^{4}$$
$$= 0.6821 + 4 = 4.6821$$
$$ii.\quad \log(481) = \log\lfloor (4.81)\times 10^{2} \rfloor = \log(4.81) + \log 10^{2}$$
$$= 0.6821 + 2 = 2.6821$$
$$iii.\quad \log(0.00481) = \log\lfloor (4.81)\times 10^{-3} \rfloor = \log(4.81) + \log 10^{-3}$$
$$= 0.6821 - 3 = -3 + 0.6821 = \bar{3}.6821$$
$$iv.\quad \log(0.0481) = \log\lfloor (4.81)\times 10^{-2} \rfloor = \log(4.81) + \log 10^{-2}$$
$$= 0.6821 - 2 = -2 + 0.6821 = \bar{2}.6821$$

اوس پاسینی پایلې فهرست کوو:

عدد	مشخصه	مانتیس	لوګارتم
48100	4	0.6821	4.6821
481	2	0.6821	2.6821
4.81	0	0.6821	0.6821
0.0481	-2	0.6821	-1.3179
0.00481	-3	0.6821	-2.3179

لیدل کیږي چې په جدول کې د ټولو اعدادو د لوګارتم مانتیسونه له 0.6821 سره مساوي دي.

(2) له یوه څخه د غټو اعدادو د لوګارتم مشخصه، د صحیح ارقامو څخه یې یو واحد کمه ده. مثلاً

اعداد	425	9680	2345.9	200000
مشخصه	2	3	3	5

(3) له یوه څخه د وړو اعدادو د لوګارتم مشخصه هغه منفي عدد دی چې له اعشاریې څخه وروسته د صفرونو له تعداد، جمع یو سره مساوي وي، د ساري په توګه

اعداد	0.128	0.041	0.00065	0.00001
مشخصه	-1	-2	-4	-5

(4) د لوګارتم مشخصه د عدد له مخې او د (2) او یا (3) قاعدې مطابق ټاکل کیږي، خو مانتیس له جدول څخه ترلاسه کیږي.

(5) د درې رقمي عدد (مثلا 493) د لوګارتم مانتیس په 49 سطر او 3 ستون کې واقع دی، او د 598 مانتیس په 59 سطر او 8 ستون کې ځای لري (درې رقمي جدول کې)

(6) د یوه عدد لوګارتم د مانتیس او مشخصې له مجموعې څخه ترلاسه کیږي.

مثلاً

$$\log(48100) = 4 + 0.6821 = 4.6821$$

$$\log(0.00481) = -3 + 0.6821 = \bar{3}.6821$$

او باید ووایو چې

$$\bar{3}.6821 = -3 + 0.6821 = -2.3179$$

انټي لوګارتم: که چېرې $y = \log x$ وي، په دې صورت کې $x = 10^y = anti\log y$ دی. لکه

$$\log 1000 = 3 \Leftrightarrow anti\log 3 = 10^3 = 1000$$

که د یوه عدد لوګارتم معین وي د صحیح رقمونو شمېر او یا د اعشاریې ځای ټاکل د عدد د مشخصې په ذریعه او د عدد ارقام د مانتیس پواسطه له جدول څخه کیږي.

مثال: N عدد وټاکئ په هغه صورت کې چې:

$$i.\ \log N = 1.7016 \quad , \quad ii.\ \log N = -2.3179$$

حل: له $\log N = 1.7016$ څخه ښکاري چې $m = 0.7016$ او $c = 1$ دی، په دې اساس د عدد صحیح رقمونو شمېر مشخصې ته یې په کتو سره باید 2 وي. خو له دې چې د غه مانتیس په جدول کې 503 عدد پورې اړوند دی، نو باید $N = 50.3$ وي، په همدې توګه

$$\log N = -2.3179 = -2 - 0.3179 = -3 + 1 - 0.3179 = -3 + 0.6821$$

نو ځکه $m = 0.6821$ او $c = -3$ دی. له دې چې 0.6821 عدد په جدول کې د 481 عدد مانتیس دی او د دې په پام کې نیولو سره چې د N مشخصه 3- عدد دی په پایله کې:

$$N = 0.00481$$

د یادولو وړ ده چې پاسیني موارد عبارت دي له:

$$i.\ \log N = 1.7016 \Leftrightarrow N = 10^{1.7016} = 50.3$$

$$ii.\ \log N = -2.3179 \Leftrightarrow N = 10^{-2.3179} = 0.00481$$

یادونه: نن ورځ د یوه واړه ماشین حساب په ذریعه کولی شو د لوګارتمي، نمائي او مثلثاتي توابعو قیمتونه په ډېرې آسانۍ وشمېرو، له همدې وجهې لوګارتمي او مثلثاتي جدولونه له نویو کتابونو څخه لري شوي دي نو په همدې توګه، انټرپولیشن عملیه داسې غوټه ګڼل کیږي چې په خوله خلاصیږي، داسې حال کې چې دا اصلا د ګوتو کار دی.

طبيعي لوګارتم: طبيعي لوګارتم چې قاعده يې اويلر $(e = 2.71827182\cdots)$ عدد په پام کې نيول کيږي، د رياضي د تيوري ګانو او قضاياوو په ثبوت لکه ليمت، مشتق او داسې نورو برخو کې خورا کارونې لري او عبارت دی له:

$$\ln x = \log_e x \quad , \quad e = 2.7182818285\cdots$$

له دې چې $\log_e e^x = x$, $e^{\log_e x} = x$ دی، په دې اساس

$$\boxed{e^{\ln x} = x \quad , \quad \ln e^x = x}$$

د اعشاري او طبيعي لوګارتمونو ترمنځ اړيکې: د دې دوو لوګارتمونو د قاعدو يعنې 10 او e په پام کې نيول او د لاندې اړيکې $(\log_a x)(\log_b a) = \log_b x$ په کارولو سره لرو چې

$$(\log_{10} x)(\log_e 10) = \log_e x \Rightarrow (\log x)(\ln 10) = \ln x$$

$$(\log_e x)(\log_{10} e) = \log_{10} x \Rightarrow (\ln x)(\log e) = \log x$$

خو له شمېرنو ترلاسه شوي چې:

$$\log e = 0.434294\cdots \quad , \quad \ln 10 = 2.302584\cdots$$

د لوګارتم کارونې: د اعشاري لوګارتم په کارولو سره کولی شو داسې شمېرنې ترسره کړو چې په عمل کې ستونزمنې او يا حتی ناممکن وي. لوګارتم عمليه کولی شي ضرب په جمع، تقسيم په منفي، توان په ضرب او جذر په تقسيم واړوي، خو د دې کارونو په ترڅ کې طبعا چې د لوګارتم او انتي لوګارتم د شمېرلو لپاره د حساب ماشين ته اړتيا پيښيږي.

مثلا که وغواړو $(1.08)^{65}$ عدد وشمېرو دغه کار سخت دی او يا که وغواړو $\sqrt[52]{954658}$ ترلاسه کړو، دا عمليه غير ممکن ده، خو دواړه ياد شوي شمېرنې د لوګارتم په مرسته شونې دي.

د توابعو د مشتق او حتی د نمائي توابعو ډېر شمېر ليمتونه د طبيعي لوګارتم په ذريعه په آسانۍ صورت مومي.

4 مثال: $p = 100(1.08)^{10}$ عدد شمېرو.

$$\log p = \log\left\lfloor 100(1.08)^{10} \right\rfloor = \log 100 + \log(1.08)^{10} = 2 + 10\log(1.08)$$

$$= 2 + 10(0.0334) = 2.334 \Rightarrow \log p = 2.334$$

$$\Rightarrow p = anti\ \log(2.334) = 215.8 \Rightarrow 100(1.08)^{10} = 215.8$$

5 مثال: $q = (7.284)^5$ عدد وشمېرئ.

$$\log q = \log(7.284)^5 = 5\log(7.284) = 5.(0.8623) = 4.3115$$

$$q = anti\ \log(4.3115) \Rightarrow q = 20490 \Rightarrow (7.284)^5 = 20490$$

ریشتر مقیاس: چارلز ریشتر امریکایی زلزه پوه په 1900م کال کې زیږدلی و، د زلزلې د اندازې لپاره یې یو مقیاس تعریف کړ چې وروسته بیا د ده په نامه مشهور شو. ریشتر مقیاس د میکرون په حساب د زلزلې سنج ماشین، د ټرانګې پواسطه د څپې د لمنې بدلون تر ټولو لوړ قیمت لوګارتم دی. که چېرې زلزله 8 ریشتر وي، د زلزلې مرکزي سیمې په بشپړه توګه ورانوي.

6 مثال: که د زلزلې په مرکز کې د څپې تر ټولو لوړ بدلون 10 متر یعنې 10000000 میکرو متر او د تناوب دوره یې $T = 1$ ثانیه وي، د زلزلې شدت عبارت دی له $\log(10\,000\,000) = 7$ ریشتر درجې څخه.

7.5 هایپربولیک توابع

هایپربولیک توابع د فزیک او انجنیري مسایلو په تحلیل کې ډېرې کاریږي او ځینې وخت د هغه په ذریعه د مشتق او انتګرال شمېرنې ډېرې ګټورې او جالبې وي. دغه توابع د $y = e^{x}$ او $y = e^{-x}$ نمائي توابعو له ترکیب څخه منځته راغلي، مثلثاتي توابعو ته ورته ځانګړنې لري او دلته په لنډ ډول پېژندل کیږي.

د هایپربولیک توابعو پېژندنه: ساین هایپربولیک تابع د ($\sinh$) سمبول او کوساین هایپربولیک تابع د ($\cosh x$) سمبول سره د تعریف له مخې عبارت دي له:

$$\sinh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2},\ x \in \mathbb{R} \quad , \quad \cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2},\ x \in \mathbb{R}$$

داسې حال کې چې x یو حقیقي عدد دی.

له دې چې $y = \cosh x$ او $y = \sinh x$ د $y = e^{x}$ او $y = e^{-x}$ له مجموع او تفاضل څخه جوړ شوي نو په دې اساس د ګرافونو له مجموع او تفاضل څخه یې کولی شو ټکی په ټکی د دې دوو هایپربولیک توابعو ګراف رسم کړو (7.5 شکل).

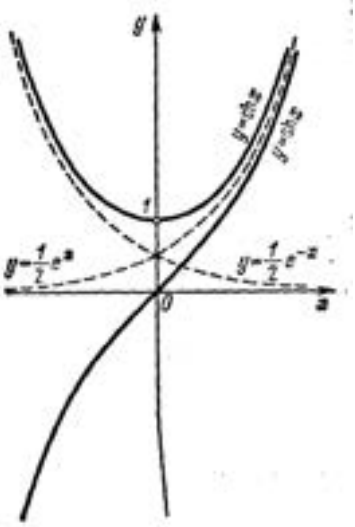
مثلثاتي توابعو ته ورته تنجنت هایپربولیک، کوتنجنت هایپربولیک، سیکنت هایپربولیک او کوسیکنت هایپربولیک توابع هم په لاندې ډول معرفي کوو.

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}},\ x \in \mathbb{R} \quad , \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}},\ x \neq 0$$

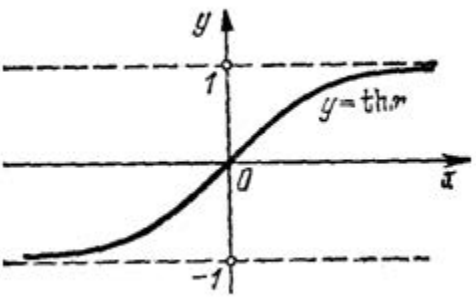
$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^{x} + e^{-x}},\ x \in \mathbb{R} \quad , \quad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^{x} - e^{-x}},\ x \neq 0$$

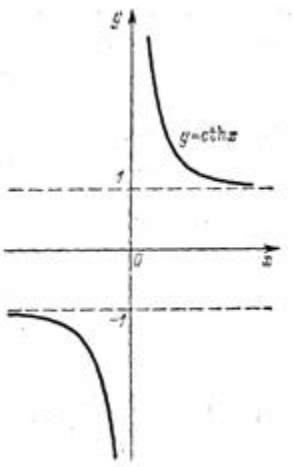
له دې چې $-1 < \tanh x < 1$ دی، نو $y = \tanh x$ ګراف د دوو $y = 1$ او $y = -x$ مستقیم خطونو ترمنځ محدود دی او په همدې توګه $\coth x > 1$ او $\coth x < -1$ دی په دې اساس د $y = \coth x$ ګراف د $y = 1$ او $y = -x$ مستقیم خطونو له محدودې څخه بهر دي.

په دې برخه کې ساين هايپربوليک، کوساين هايپربوليک، تنجنت هايپربوليک او کوتنجنت هايپربوليک توابع او اړونده معکوس يې په لنډ ډول مطرح کوو.



7.5 شکل





7.6 شکل 7.7 شکل

د هايپربوليک توابعو ځينې ځانګړنې: هايپربوليک توابع له مثلثاتي توابعو سره لږ شان توپير لري، دلته د بېلګې په توګه لاندينۍ ځانګړنې يادوو:

i. $\cos h^2 x - \sin h^2 x = 1$

ii. $\tanh^2 x + \sec h^2 x = 1$

iii. $\coth^2 x - \csc h^2 x = 1$

د پاسينيو اړيکو ثبوت آسان دی، د بېلګې په ډول لومړی مساوات ثبوتوو:

$$i.\quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{(e^x)^2 + 2e^x e^{-x} + (e^{-x})^2}{4} - \frac{(e^x)^2 - 2e^x e^{-x} + (e^{-x})^2}{4}$$

$$= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

1 **مثال:** لاندې اړيکې ثبوت کړئ:

$$i.\quad \cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

$$ii.\quad \sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$

حل : د تعريف سره سم

$$i.\quad \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \times \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} \times \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

$$= \frac{e^{x+y} + e^{x-y} + e^{-x+y} + e^{-x-y}}{4} + \frac{e^{x+y} - e^{x-y} - e^{-x+y} + e^{-x-y}}{4} = \frac{2e^{x+y} + 2e^{-x-y}}{4}$$

$$= \frac{2(e^{x+y} + e^{-x-y})}{4} = \frac{e^{x+y} + e^{-(x+y)}}{2} = \cosh(x+y)\ \bullet$$

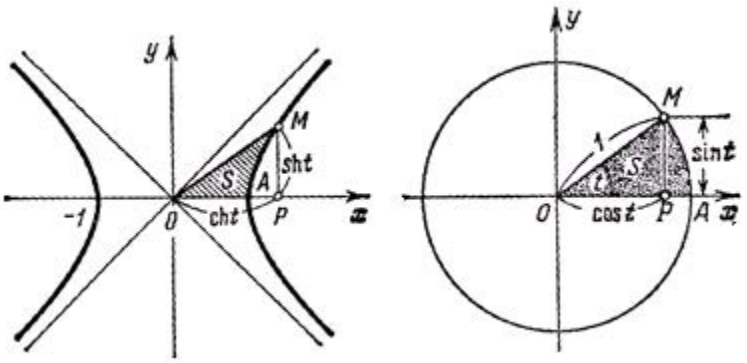
(ii) اړيکه هم په ورته ډول ثبوت کېدای شي.

د هايپربوليک توابعو نوم اېښودنه : هايپربوليک توابع په دې ورته وايي، چې په هايپربول کې دايروي توابعو ته ورته دي، لاندې اړيکو ته پام وکړئ.

$$\left.\begin{aligned} x &= \cos t \\ y &= \sin t \end{aligned}\right\} \Rightarrow x^2 + y^2 = 1 \quad \cdots \quad (i) \qquad \text{(دايره)}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= \cosh t \\ y &= \sinh t \end{aligned}\right\} \Rightarrow x^2 - y^2 = 1 \quad \cdots \quad (ii) \qquad \text{(هايپربول)}$$

په (i) اړيکه کې د دايرې معادلې او په (ii) اړيکه کې د هايپرابول معادلې په اصلي او پارامتريک توګه ښودل شوي دي. که چېرې پاسينيو معادلو له مخې دايره او هايپربول په پام کې ونيسو په دايره کې t پارامتر په عددي توګه، د AOM زاويې او يا د يادې دايرې د AOM قطاع د مساحت له دوه چند سره مساوي دی(7.8 شکل). يعنې $t = 2s$ دی. په ورته ډول په هايپربول کې هم t پارامتر د ياد هايپربول د AOM قطاع د مساحت له دوه چند سره مساوي دی(7.9 شکل).



7.8 شکل 7.9 شکل

د هایپربولیک توابعو د تعریف ناحیې او د قیمت سیټونه

تابع	د تابع د تعریف ناحیه	د تابع د قیمتونو سیټ
$\sinh x$	$(-\infty , \infty)$	$(-\infty , \infty)$
$\cosh x$	$(-\infty , \infty)$	$[1 , \infty)$
$\tanh x$	$(-\infty , \infty)$	$(-1 , 1)$
$\coth x$	$(-\infty , 0)\cup(0 , \infty)$	$(-\infty , -1)\cup(1 , \infty)$

2. **مثال:** که چېرې $\sinh x = 2$ وي، پاتې هایپربولیک توابع یې وشمېرئ او x عدد ترلاسه کړئ.

حل:

$$\cos h^2 x - \sin h^2 x = 1 \Rightarrow \cos h^2 x = 1 + \sin h^2 x \Rightarrow \cos h^2 x = 1 + 4$$

$$\Rightarrow \cos h^2 x = 5 \Rightarrow \cosh x = \sqrt{5} \Rightarrow \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\Rightarrow \coth x = \frac{1}{\tanh x} = \frac{\sqrt{5}}{2} , \cosh x + \sinh x = e^x$$

$$\Rightarrow x = \ln(\cosh x + \sin x) = \ln(\sqrt{5} + 2)$$

3 **مثال:** د x هایپربولیک توابعو قیمت داسې وټاکئ چې $x = \ln 4$ وي.

حل: له دې چې $x = \ln 4$ دی، $e^x = 4$ او $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ کیږي نو

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{4 + \frac{1}{4}}{2} \Rightarrow \cosh x = \frac{17}{8}$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{4 - \frac{1}{4}}{2} \Rightarrow \sinh x = \frac{15}{8}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{15}{17} \quad , \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{17}{15}$$

7.6 د هايپربوليک توابعو معکوس

له دې چې هايپربوليک توابع اکسپونشيل ډوله دي، نو بايد معکوس توابع يې لوګارتمي وي، دغه توابع په $\sin^{-1} hx$ ، $\cos^{-1} hx$ ، $\tan^{-1} hx$ او $\cot^{-1} hx$ او يا يې په ترتيب سره په $\arcsin hx$ ، $\arccos hx$ ، $\arctan hx$ او $arc\coth x$ توګه ښيي.

د هايپربوليک توابع تعريف د لاندې اړيکو له تعادله زيږېدلی.

$$\boxed{\begin{array}{ll} y = \arcsin h\, x \Leftrightarrow \sinh y = x & , \; y = \arccos h\, x \Leftrightarrow \cosh y = x \\ y = \arctan h\, x \Leftrightarrow \tanh y = x & , \; y = \operatorname{arc\,cot} h\, x \Leftrightarrow \coth y = x \end{array}}$$

د ساين هايپربوليک تابع معکوس : د $y = \arcsin hx \Leftrightarrow x = \sinh y$ په پام کې نيولو سره لرو چې:

$$\sinh y = x \;\Rightarrow\; \frac{e^{y} - e^{-y}}{2} = x \;\Rightarrow\; e^{y} - e^{-y} = 2x$$

$$\Rightarrow e^{y} - e^{-y} - 2x = 0 \Rightarrow (e^{y} - e^{-y} - 2x)e^{y} = 0 \cdot e^{y}$$

$$\Rightarrow e^{2y} - 1 - 2x\, e^{y} = 0 \Rightarrow (e^{y})^{2} - 2x\, e^{y} - 1 = 0$$

اوس $\arcsin hx$ يعنې y د لاندې معادلې حل دی: $(e^{y})^{2} - 2xe^{y} - 1 = 0$

دلته په معادله کې $e^{y} = z$ وضع کوو څو لاندې شکل غوره کړي: $z^{2} - 2xz - 1 = 0$

په دې دويم درجه معادله کې z مجهول او x معلوم عدد فرض کيږي، له معمول سره سم په لاندې توګه حل کيږي:

$$\Delta' = b'^{2} - ac = (-x)^{2} - 1 \cdot (-1) = x^{2} + 1$$

$$z = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-(-x) \pm \sqrt{x^{2}+1}}{1} = x \pm \sqrt{x^{2}+1}$$

يعنی د معادلې حل عبارت دی له $z = x \pm \sqrt{x^{2}+1}$ څخه، په دې اساس

$$e^{y} = x \pm \sqrt{x^{2}+1}$$

د وروستۍ اړيکې ښی لور په هر حال مثبت دی، نو په کين لور کې د منفي علامې موجوديت منتفي دی يعنې $e^{y} = x + \sqrt{x^{2}+1}$ او يا $y = \ln\left(x + \sqrt{x^{2}+1}\right)$ له دې ځايه

$$\boxed{\arcsin hx = \ln\left(x + \sqrt{x^{2}+1}\right) \bullet}$$

د تانجنت هايپربوليک تابع معکوس : د $y = \arctan hx \Leftrightarrow x = \tanh y$ په پام کې نيولو سره لرو چې:

$$\tanh y = x \;\Rightarrow\; \frac{e^{y} - e^{-y}}{e^{y} + e^{-y}} = x \;\Rightarrow\; e^{y} - e^{-y} = x\,(e^{y} + e^{-y})$$

$$\Rightarrow e^{y} - e^{-y} - xe^{y} - xe^{-y} = 0 \Rightarrow (e^{y} - e^{-y} - xe^{y} - xe^{-y})e^{y} = 0 \cdot e^{y}$$

$$\Rightarrow e^{2y} - 1 - xe^{2y} - x = 0 \Rightarrow (1-x)e^{2y} = 1 + x \Rightarrow e^{2y} = \tfrac{1+x}{1-x}$$

$$\Rightarrow 2y = \ln \tfrac{1+x}{1-x} \Rightarrow y = \tfrac{1}{2} \ln \tfrac{1+x}{1-x} \Rightarrow \arctan hx = \tfrac{1}{2} \ln \tfrac{1+x}{1-x} \bullet$$

په همدې توګه نورې معکوس هايپربوليک توابع هم ترلاسه کيږي.
د لوګارتمي توابعو په توګه معکوس هايپربوليک توابع

$$\arcsin h\, x = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right), x\in\mathbb{R} \quad , \quad arc\cos h\, x = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) \quad , \quad x\geq 1$$

$$\arctan h\, x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} \quad , \quad |x|<1 \quad , \quad arc\coth x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1} \quad , \quad |x|>1$$

د معکوس هايپربوليک توابعو د تعريف ناحيې او د قيمت سيټونه

تابع	د تابع د تعريف ناحيه	د تابع د قيمتونو سيټ
$arc\sinh x$	$(-\infty,\infty)$	$(-\infty,\infty)$
$arc\cosh x$	$[1,\infty)$	$(-\infty,\infty)$
$arc\tanh x$	$(-1,1)$	$(-\infty,\infty)$
$arc\coth x$	$(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$	$(-\infty,0)\cup(0,\infty)$

7.7 د څپرکي لنډيز

د اعدادو توانونه. که چېرې a او b مثبت اعداد ، x او y حقيقي اعداد وي، نو

$$i.\ a^0=1\ ,a\neq 0 \quad , \quad ii.\ a^{-x}=\frac{1}{a^x} \quad , \quad iii.\ a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$$

$$iv.\ a^x a^y=a^{x+y} \quad , \quad v.\ \left(a^x\right)^y=a^{xy} \quad , \quad vi.\ \frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$$

$$vii.\ (ab)^x=a^x b^x \quad , \quad viii.\ \left(\frac{a}{b}\right)^x=\frac{a^x}{b^x}\ , b\neq 0$$

$$ix.\ a^x=a^y \Leftrightarrow x=y \quad , \quad x.\ a^x=b^x \Leftrightarrow a=b$$

جذر.

$$\sqrt[n]{x^n}=\begin{cases}|x| \ , \ n=2k \ , \ k\in\mathbb{N}\\ x \ , \ n=2k+1 \ , \ k\in\mathbb{N}\end{cases}$$

نمائي تابع. $f(x)=a^x\ , 1\neq a>0$

د نمائي تابع ځانګړنې. که چېرې a يو مثبت عدد او $f(x)=a^x$ وي، نو:

(الف) f تابع متزايد ده مشروط په دې چې $a>1$ وي.

(ب) f تابع متناقص ده په هغه صورت کې چې $a<1$ وي.

(ج) د $a=1$ لپاره، $f(x)=1$ ثابت تابع ترلاسه کيږي.

(د) په هر حال کې د $y=a^x$ ګراف له $(0,1)$ نقطې څخه تېريږي.

اويلر عدد. $e = 2.718\,281\,828\,4\cdots$

لوګارتم. $x = a^y \Leftrightarrow y = \log_a x$

د لوګارتم ځانګړتياوې. د a ، b ، x ، y مثبت اعدادو او α حقيقي عدد ترمنځ لاندې ځانګړنې صدق کوي:

$i.\ a^{\log_a x} = x$, $ii.\ \log_a a^x = x$, $iii.\ \log_a 1 = 0$, $iv.\ \log_a a = 1$

$vi.\ \log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$, $vii.\ \log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

$viii.\ \log_a (x^\alpha) = \alpha \log_a x$, $ix.\ \log_{a^\alpha} x = \frac{1}{\alpha}\log_a x$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$x.\ (\log_a x)(\log_b a) = \log_b x$, $xi.\ (\log_b a)(\log_a b) = 1$, $xii.\ x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$

اعشاري لوګارتم (معمولي لوګارتم). $\log x := \log_{10} x$

د $\log x$ مانتيس (m) او مشخصه (c).

$$x = a\cdot 10^c\ , c \in \mathbb{Z}\ , 1 \le a < 10 \Rightarrow \log x = \underset{m}{\log a}\ +\ c\ \ ,\ 0 \le m < 1$$

انتي لوګارتم. $y = \log x \Leftrightarrow x = \operatorname{int}\log y = 10^y$

طبيعي لوګارتم. $\ln x = \log_e x$, $e = 2.718281828\cdots$

د طبيعي او اعشاري لوګارتم ترمنځ اړيکې.

$(\log x)(\ln 10) = \ln x$, $(\ln x)(\log e) = \log x$

$\log e = 0.434294\cdots$, $\ln 10 = 2.302584\cdots$

هايپربوليک توابع

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\ , x \in \mathbb{R} \quad , \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\ , x \in \mathbb{R}$$

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\ , x \in \mathbb{R} \quad , \quad \coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\ , x \neq 0$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{2}{e^x + e^{-x}}\ , x \in \mathbb{R} \quad , \quad \operatorname{csch} x = \frac{2}{e^x - e^{-x}}\ , x \neq 0$$

د هايپربوليک توابعو ځينې ځانګړنې:

i. $\cos h^2 x - \sin h^2 x = 1$

ii. $\tanh^2 x + \operatorname{sec} h^2 x = 1$

iii. $\coth^2 x - \operatorname{csc} h^2 x = 1$

د هايپربوليک توابعو معکوس

$\arcsin h\, x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right), x \in \mathbb{R}$ ، $arc\cos h\, x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$ ، $x \geq 1$

$\arctan h\, x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$ ، $|x|<1$ ، $arc\coth x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}$ ، $|x|>1$:

7.8 تمرين

1. لاندې افادې ساده کړئ.

$i.\ \left(\frac{ab^2}{a^2b}\right)^3$ ، $ii.\ \left(\frac{4}{5}\right)^{-2}$ ، $iii.\ \left(\frac{-2a}{3b^2}\right)^3$ ، $iv.\ \left(\frac{a^n}{b}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{a}{b^{4n}}\right)^2$

2. لاندې لوګارتمي معادلې حل کړئ.

$i.\ 2^{2x+1}-3\left(2^x\right)+1=0$ ، $ii\ \ 3^{2x+1}-28\left(3^x\right)+9=0$

3. لاندې معادلې حل کړئ.

$i.\ 10^x = 0.00001$ ، $ii.\ x^4 = 0.0001$

$iii.\ (0.1)^x = 1000$ ، $iv.\ \left(\frac{1}{10}\right)^x = 100$

4. لاندې افادې د لوګارتم مفهوم په کارولو سره په اړونده معادل افادو واړوئ.

$i.\ (32)^{\frac{-1}{5}} = \frac{1}{2}$ ،$iiiii.\ \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$ ، $.\ 27^{\frac{-1}{3}} = \frac{1}{3}$

5. لاندې لوګارتمي اړیکې په اړونده معادل اکسپونشیل واړوئ.

$i.\ \log_{\frac{1}{6}} 36 = -2$ ،ii،$iii.\ \log_9 81 = 2$ $.\ \log_4\left(\frac{1}{16}\right) = -2$

6. لاندې معادلې د x لپاره حل کړئ.

$i.\ \log_x 0.001 = -3$ ، $ii.\ \log_2 x = 5$ ، $iii.\ \log_x 1\,000\,000 = -6$

7. لاندې افادې ساده کړئ.

$i.\ \log_4(\log_9 3)$ ، $ii.\ \log_x\left(\log_a a^x\right)$ ، $iii.\ \log_x(\log_x x)$

8. لاندې افادې ساده کړئ.

$i.\ \log_b\left(\frac{r^2 s}{t^2}\right)$ ، $ii.\ \log\sqrt{xy}$ ، $iii.\ \log_b u^{\frac{-4}{5}}$ ، $iv.\ \log\left(\sqrt[4]{x}\sqrt[3]{y}\right)$

9. لاندې افادې توحید کړئ.

$i.\ 4\log_b m - \frac{2}{3}\log_b y$ ، $ii.\ \log_b x + \log_b y = \log_b z$

10. لاندې معادلې حل کړئ

$i.\ \log_b(x-9)+\log_b x=2$, $ii.\ \log x+\log(x-3)=1$

$iii.\ \log_b x=\frac{1}{2}\log_b 36-2\log_b 3+\frac{3}{2}\log_b 16$

11. لاندې معادلې وشمېرئ.

$i.\ \log_{0.001}10$, $ii.\ \log_{0.1}0.001$, $iii.\ \log_{0.1}1000$, $iv.\ \log_{0.01}100$

12. د لاندې لوګارتمونو مشخصې ترلاسه کړئ.

$i.\ \log 4536789$. $ii.\ \log 34.6578$, $iii.\ \log 5.0001$, $iv.\ \log 0.0000234$

13. لاندې لوګارتمونه د ماشین حساب په مرسته ترلاسه کړئ، ضمنا د هر یوه مشخصه او مانتیس هم وټاکئ.

$i.\ \log 0.024$, $ii.\ \log 2345.6$, $iii.\ \log 10000$, $iv.\ \log 213.001$

14. N عدد مشخص کړې په هغه صورت کې چې

$i.\ \log N=5$, $ii.\ \log N=-5$, $iii.\ \log N=-1$, $iv.\ \log N=0.5$

15. p عدد ترلاسه کړئ که چېرې

$a.\ \ln p=2$, $b.\ \ln p=-1$, $c.\ \ln p=0$, $\ln p=1$

16. لاندې اړیکې ثبوت کړئ:

$i.\ \sinh(x+y)=\sinh x\cosh y+\cosh x\sinh y$

$ii.\ \sinh(2x)=2\sinh x\cosh y$

$iii.\ \cosh(2x)=\cosh^2 x+\sinh^2 x$

17. لاندې اړیکې ثبوت کړئ:

$i.\ \tanh^2 x+\sec h^2 x=1$, $ii.\ \coth^2 x-\csc h^2 x=1$

$iii.\ \sinh(x+y)=\sinh x\cosh y+\cosh x\sinh y$

$iv.\ \sinh(-x)=-\sinh x$, $v.\ \cosh(-x)=\cosh x$

18. وښیئ چې:

$i.\ \sinh x+\cosh x=e^x$, $ii.\ \sinh x-\cosh x=-e^{-x}$

19. لاندې اړیکې ثبوت کړئ:

$i.\ arc\cos h\,x=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$, $x\geq 1$

$ii.\ arc\coth x=\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}$, $|x|>1$

اتم څپرکی
مثلثاتي توابع

مثلثات د رياضي هغه برخه ده، چې د مثلث د اضلاع او زاويو ترمنځ اړيکې پکې مطرح کيږي او دايره هم پکې شاملیږي. دغه مبحث د توابعو نظريې او مختلط اعدادو سره جالب مناسبتونه لري. مثلثات د دايروي او مثلثاتي توابع تر عنوانونو لاندې هم مطالعه کوي او د رياضي، فزيک، ستورپېژندنې او داسې نورو څانګو کې ډېرې کارونې لري. په دې څپرکي کې د دې مبحث اساسات او هندسي قواعد په لنډه توګه مطرح شوي دي.

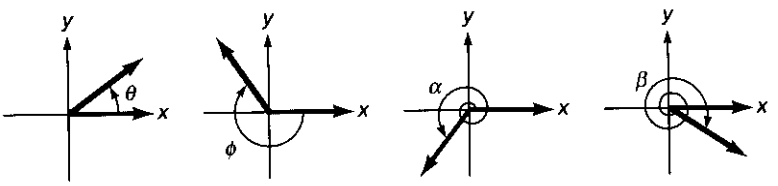
8.1 د زاويې او ندازه نيونې مفاهيم يې

جهت لرونکې زاويه: په مثلثات کې د زاويې لپاره يو جهت په پام کې نيول کيږي. زاويه د ثابت نقطې په شاوخوا د يوه نيم خط له دوران څخه عبارت ده، چې مثبت جهت يې د ساعت ستنې (عقربې) خلاف لوری دی. په (8.1 شکل) کې هره يوه زاويه د O نقطې په شاوخوا د OA نيم خط له حرکت څخه په OA' حالت کې جوړې شوي.



8.1 شکل

د زاويې ستندرد حالت: که چېرې د يوې زاويې لومړی ضلع په x محور منطبق او راس يې د قايم مختصاتو مبدا فرض شي، ويل کيږي چې زاويه په ستندرد حالت راوړل شوې ده په لاندې (8.2 شکل) کې هر يوه α ، β ، θ او ϕ زاويه ستندرد حالت لري.



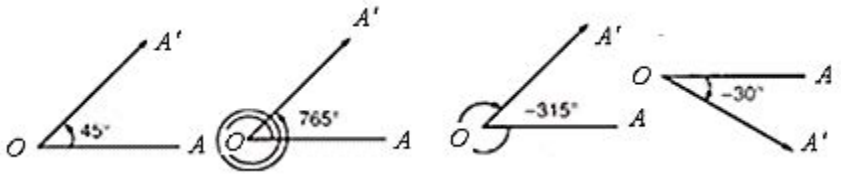
8.2 شکل

د زاويې واحدات

په عمومي توګه راديان او درجه د زاويې اندازه نيونې معيارونه دي.

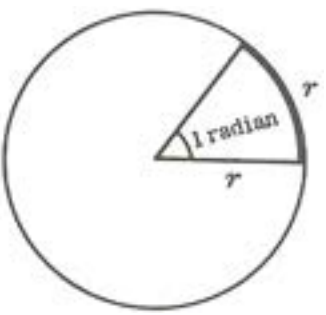
درجه: هغه زاويه ده چې وسعت(پراختيا) يې د عقربې خلاف د يوه مکمل دور $\frac{1}{360}$ مه برخه وي، په دې اساس د يوې $360°$ درجې نقطې په شاوخوا څلور قايمې ځای لري. يعنې که د دايرې محيط په 360 مساوي قوسونو وويشل شي، د دايرې مرکزي زاويه چې د هريوه يادشوي قوس په مقابل کې پرته وي "درجه" ده چې په $1°$ ليکل کيږي.

مثال: $45°$ ، $765°$ ، $-30°$ او $-315°$ وسعت لرونکې زاويې په ستندرد حالت کې په لاندې توګه ښودل شوي دي(8.3 شکل).



8.3 شکل

راديان. د دايرې هغې مرکزي زاويې څخه عبارت ده چې د مخامخ قوس اوږدوالی يې د دايرې له شعاع سره مساوي وي (8.4 شکل).



8.4 شکل

د دايرې د محيط او قطر نسبت: د دايرې د محيط او قطر نسبت په π توري ښيي، يعنې که د دايرې محيط c او شعاع يې r وي، قطر يې $2r$ دی او $\frac{c}{2r} = \pi$ کيږي. په دې اساس د دايرې د محيط اوږدوالی عبارت دی له $2\pi r$ څخه.

π عدد غير ناطق دی او د ارشميدس عدد په نامه يادېږي. دغه عدد له اعشارې وروسته تر زرګونو رقمونو پورې شمېرل شوی او په کتابونو کې ثبت شوی. په ساده شمېرنو کې يې بسيط قيمت 3.14 يا $\frac{22}{7}$ عدد په پام کې نيسي، او د اعشارې وروسته لسو رقمونو پورې يې قيمت عبارت دی له:

$$\pi \approx 3.1415926535\cdots$$

له دې چې د دايرې محيط له $2\pi r$ څخه عبارت دی، داسې حال کې چې r د دايرې شعاع وي، په دې توګه د يوه نقطې شاوخوا 2π راديان يا تقريبا 6.28 راديان چې د $360°$ معادل دی يعنې:

$$180° = \pi\, rad. \approx 3.141\ 592\ 654\ 5\, rad. \approx 3.14\, rad.$$

د رادیان او درجې ترمنځ اړیکې: لکه څرنګه چې وویل شول $360°$ درجه د 2π رادیان معادل ده، په دې اساس که د یوې زاویې وسعت د درجې په حساب D او د رادیان په حساب R ومنو، نو لرو چې:

$$\frac{D}{360} = \frac{R}{2\pi} \Rightarrow \frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$$

د ورستي تناسب په ذریعه کولی شو درجه په رادیان او برعکس رادیان په درجه واړوو.

2 مثال: $30°$ ، $45°$ ، $60°$ ، $90°$ ، $270°$ زاویې په رادیان واړوئ:

$$D = 30° \Rightarrow \frac{R}{\pi} = \frac{30}{180} \Rightarrow R = \frac{30\pi}{180} = \frac{\pi}{6} rad$$

$$D = 45° \Rightarrow \frac{R}{\pi} = \frac{45}{180} \Rightarrow R = \frac{45\pi}{180} = \frac{\pi}{4} rad$$

په همدې توګه $270° = \frac{3\pi}{2} rad$, $90° = \frac{\pi}{2} rad$, $60° = \frac{\pi}{3} rad$

د رادیان او درجې واحدونو، مقایسوي جدول

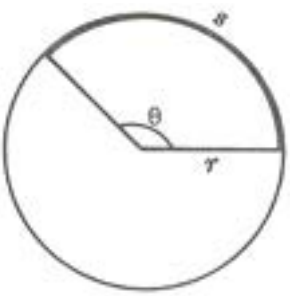
درجه	1	30	45	60	90	180	270	360
رادیان	$\frac{\pi}{180}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{2\pi}{3}$	2π

د دایرې د قوس اوږدوالي: که چېرې l د رادیان په اساس د θ مرکزي زاویې د مقابل قوس اوږدوالی او r د اړونده دایرې شعاع وي، نو $l = r\theta$ دی.

ثبوت: طبعا د شعاع له جنسه د دایرې قوس اوږدوالی، د اړونده دایرې د مرکزي زاویې له وسعت سره متناسب دی. نو د یادې نقطې په شاوخوا کې 2π رادیان وسعت لرونکې زاویه موجوده ده او د دایرې د محیط اوږدوالی (د 2π رادیان زاویې د مقابل قوس اوږدوالی) $2\pi r$ واحد اوږدوالی دی (8.5 شکل) په دې توګه د θ زاویې د مقابل قوس اوږدوالی د لاندې اړیکې په اساس ترلاسه کیږي:

زاویه د قوس اوږدوالی

$$\begin{matrix} 2\pi r \\ l \end{matrix} \quad \begin{matrix} 2\pi \\ \theta \end{matrix} \Rightarrow \frac{2\pi}{2\pi r} = \frac{\theta}{l} \Rightarrow l = \frac{(2\pi r)\times\theta}{2\pi} = r\theta \quad \bullet$$

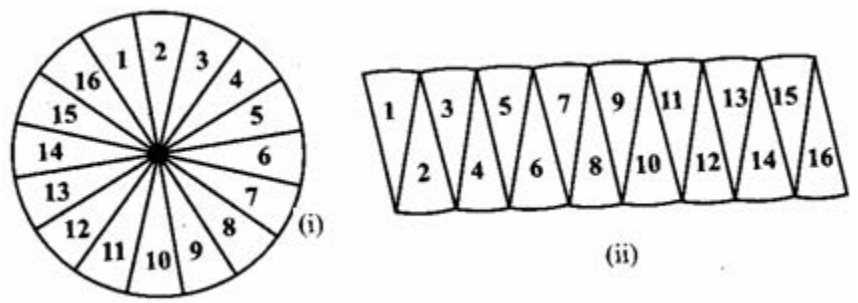


8.5 شکل

د دايرې مساحت: که S د دايرې مساحت او r يې اړونده شعاع وي، نو $S = \pi r^2$ کيږي.

ثبوت: که چېرې د دايرې مساحت په مساوي قطاع ګانو تقسيم کړو، ترلاسه شوي مثلث ډوله شکلونه د يوه بل ترڅنګ په متناوب ډول داسې کېږدو چې يو تقريبي مستطيل ترې ترلاسه شي(هر څومره چې مثلثونه ډېر وي، اړوند مستطيل يې هم ښه مجسم کيږي او د دايرې مساحت په مناسب تقريب سره د مستطيل له مساحت سره مساوي کيږي، که چېرې د قطاع شمېر لايتناهي شي ښکاره ده چې د دايرې مساحت د يوه واقعي مستطيل له مساحت سره مساوي کيږي (8.6 شکل). خو اوس پوښتنه کوو چې د مستطيل اوږدوالی او عرض څو دی؟ که ځير شو د دې مستطيل عرض له $a = r$ سره او اوږدوالی يې د دايرې محيط له نيمايي يعنې $b = \frac{C}{2} = \frac{2\pi r}{2} = \pi r$ سره مساوي دی، نو د دايرې مساحت هماغه د مستطيل مساحت دی چې د اوږدوالی او عرض له حاصل ضرب څخه په لاندې توګه ترلاسه کيږي،

$$S = ab = r\,\pi r = \pi r^2 \bullet$$



8.6 شکل

د دايرې د قطاع مساحت: که چېرې په يوه دايره کې، r شعاع، S د دايرې مساحت، K د θ راديان زاويې د مخامخ قطاع مساحت وي، نو

$$\boxed{K = \frac{1}{2}\theta r^2}$$

ثبوت: د قطاع او مخامخ زاويې مساحت يې د دايرې او مخامخ زاويې له مساحت سره مساوي دی يعنې 2π راديان، په دې اساس:

	مساحت		زاويه
θ	K	$\Rightarrow$	
2π	S		

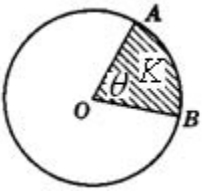
$$\Rightarrow \frac{\theta}{2\pi} = \frac{K}{S} \Rightarrow K = \frac{\theta S}{2\pi} = \frac{\theta \pi r^2}{2\pi} = \frac{1}{2}\theta r^2$$

په دې اساس د θ زاويې مخامخ قطاع مساحت عبارت دی له:

$$\boxed{K = \frac{1}{2}\,\theta r^2}$$

د قطاع مساحت، د قطاع اړوند د قوس اوږدوالی او د قطاع مرکزي زاویې کمیتونه؛ د دایرې مساحت، د دایرې محیط او د یوه دوران د زاویې له وسعت سره مساوي دي(8.7 شکل)، یعنې

$$\frac{K}{S}=\frac{l}{C}=\frac{\theta}{2\pi}$$



8.7 شکل

3 **مثال:** یوه دایره 10cm شعاع لري، د محیط اوږدوالی، مساحت، د 105^0 زاویې مخامخ قوس اوږدوالی او د دې زاویې مخامخ قطاع مساحت پې ترلاسه کړئ.

حل: د دایرې محیط $C=2\pi r=2(3.14)10=62.8\,cm$

د دایرې مساحت $S=\pi r^2=(3.14)10^2=314\,cm^2$

$$105^0=\frac{7\pi}{12}\,rad$$

د قوس اوږدوالی $\ell=r\theta=10\left(\frac{7\pi}{12}\right)=10\left(\frac{7\times3.1425}{12}\right)\approx18.32\ cm$

د قطاع مساحت $A=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}10^2\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{1}{2}10^2\left(\frac{7\times3.1415}{12}\right)=183.17cm^2$

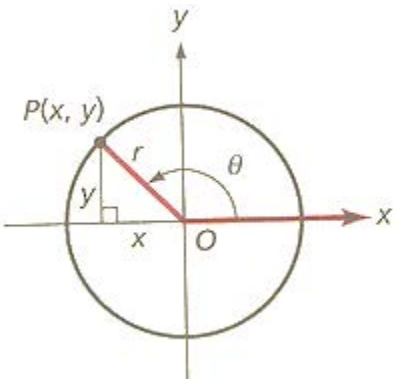
8.2 مثلثاتي نسبتونه

د مثلثاتي نسبتونو پېژندل: که چېرې په ستندرد حالت کې زاویه، د دویمې ضلعې(له مبدا پرته) پرمخ پرته نقطه وي، له دې چې $r=\sqrt{x^2+y^2}$ د $(0,0)$ او (x,y) نقطو ترمنځ واټن او د قایم الزاویې مثلث وتر دی، په دې صورت کې د θ زاویې مخامخ ضلع y او ترڅنګ ضلع یې x ده(8.8 شکل)، د θ زاویې مثلثاتي نسبتونه عبارت دي له:

$$\sin\theta=\frac{y}{r}\quad,\quad\cos\theta=\frac{x}{r}\quad,\quad\tan\theta=\frac{y}{x}$$

$$\csc\theta=\frac{r}{y}\quad,\quad\sec\theta=\frac{r}{x}\quad,\quad\cot\theta=\frac{x}{y}$$

طبعا په وروستیو څلورګونو حالاتو کې مخرجونه باید صفر نه وي.



8.8 شکل

که θ يوه حاده زاويه وي، د زاويې سا ين د مثلث مخامخ ضلعې او وتر نسبت دی، د زاويې کوسا ين، د مثلث ترڅنګ ضلعې او وتر نسبت دی، تنجنت د مثلث د مخامخ او ترڅنګ ضلعې نسبت دی. خو درې سيکنت، کوسيکنت او کوتنجنت نسبتونه يې معکوس نسبتونه دي.

په څلورګونو سيمو کې د مثلثاتي زاويو د نسبتونو اشارې

برخه/ سيمه	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$
لومړی برخه	+	+	+	+
دويمه برخه	+	−	−	−
دريمه برخه	−	−	+	+
څلورمه برخه	−	+	−	−

د مثلثاتي نسبتونو ترمنځ اړيکې: د مثلثاتي نسبتونو او اړونده شکلونو په پام کې نيولو سره لرو چې:

$$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad , \quad \cot\theta=\frac{x}{y}=\frac{\frac{x}{r}}{\frac{y}{r}}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\sec\theta=\frac{r}{x}=\frac{\frac{r}{r}}{\frac{x}{r}}=\frac{1}{\cos\theta} \quad , \quad \csc\theta=\frac{r}{y}=\frac{\frac{r}{r}}{\frac{y}{r}}=\frac{1}{\sin\theta}$$

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=\left(\frac{y}{r}\right)^2+\left(\frac{x}{r}\right)^2=\frac{x^2+y^2}{r^2}=\frac{r^2}{r^2}=1$$

$$\tan^2\theta+1=\left(\frac{y}{x}\right)^2+1=\frac{y^2}{x^2}+1=\frac{x^2+y^2}{x^2}=\frac{r^2}{x^2}=\sec^2\theta$$

$$\cot^2\theta+1=\left(\frac{x}{y}\right)^2+1=\frac{x^2}{y^2}+1=\frac{x^2+y^2}{y^2}=\frac{r^2}{y^2}=\csc^2\theta$$

په دې اساس

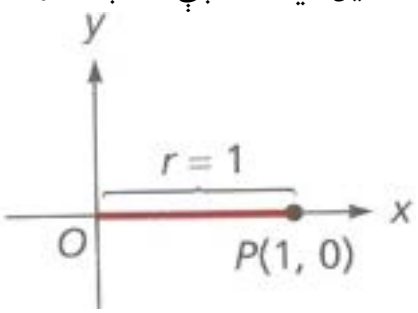
$$\sin\theta=\frac{1}{\csc\theta}\quad,\quad \cos\theta=\frac{1}{\sec\theta}\quad,\quad \tan\theta=\frac{1}{\cot\theta}$$
$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\quad,\quad \cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\quad,\quad \sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$
$$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta\quad,\quad 1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$$

د ځينو زاويو مثلثاتي نسبتونه

1مثال ($0°$ زاويهٔ): $0°$ زاويه په ستندرد حالت اړوو، د دې زاويې لومړی او دويمه ضلع په يوه بل منطبق ده او د دويمې ضلعې نهايي نقطه عبارت ده له $P(1,0)$ څخه، له مبدا څخه د P واټن $r=1$ په پام کې نيول کيږي(8.9 شکل)، نو د تعريف سره سم لرو چې:

$$\sin 0°=\frac{y}{r}=\frac{0}{1}=0\quad,\quad \cos 0°=\frac{x}{r}=\frac{1}{1}=1$$
$$\tan 0°=\frac{y}{x}=\frac{0}{1}=0\quad,\quad \sec 0°=\frac{r}{x}=\frac{1}{1}=1$$

ښکاره ده چې $\csc 0°$ $\cot 0°$ نامعين دي، ځکه چې عدد په صفر نشي تقسيم کېدلی.

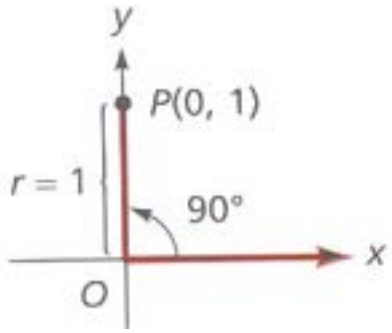


8.9 شکل

2مثال($90°$زاويهٔ): $90°$ زاويه په ستندرد حالت اړوو، د دويمې ضلعې نهايي نقطه $P(1,0)$ ده، د P واټن له مبدا څخه $r=1$ په پام کې نيول کيږي(8.10 شکل)، نو د تعريف سره سم لرو چې:

$$\sin 90°=\frac{y}{r}=\frac{1}{1}=1\quad,\quad \cos 90°=\frac{x}{r}=\frac{0}{1}=0$$
$$cs\,c\,90°=\frac{r}{y}=\frac{1}{1}=1\quad,\quad co\,t\,90°=\frac{x}{y}=\frac{0}{1}=0$$

$\tan 90°$ او $se\,c\,90°$ هم غير معين دي.



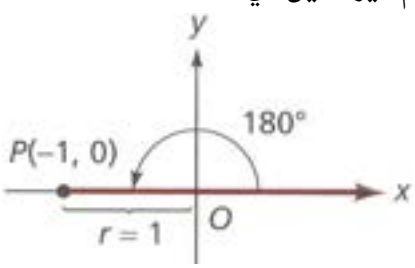
8.10 شکل

3مثال ($180°$زاويۀ): $180°$ زاويه په ستندرد حالت اړوو ، د دې زاويې لومړۍ او دويمه ضلع متقابلا د يوه بل په اوږدو کې واقع دي او د دويمې ضلعې نهايي نقطه يې $P(-1,0)$ ده، له مبدا څخه د P واټن $r=1$ په پام کې نيول کيږي(8.11 شکل)، نو د تعريف سره سم لرو چې:

$$\sin 180° = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0 \quad , \quad \cos 180° = \frac{x}{r} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\tan 180° = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0 \quad , \quad \sec 180° = \frac{r}{x} = \frac{1}{-1} = -1$$

البته $\cot 180°$ او $\csc 180°$ هم غير معين دي.



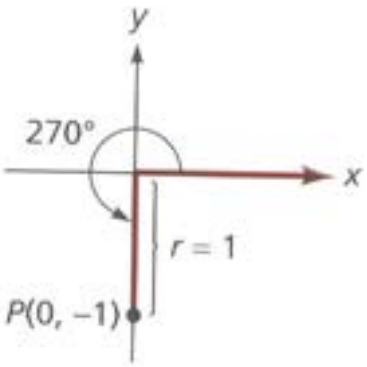
8.11 شکل

4مثال ($270°$ زاويۀ): د دويمې ضلعې نهايي نقطه $P(0,-1)$ ده، له مبدا څخه د P واټن $r=1$ دی(8.12 شکل)، نو د تعريف سره سم لرو چې:

$$\sin 270° = \frac{y}{r} = \frac{-1}{1} = -1 \quad , \quad \cos 270° = \frac{x}{r} = \frac{0}{1} = 0$$

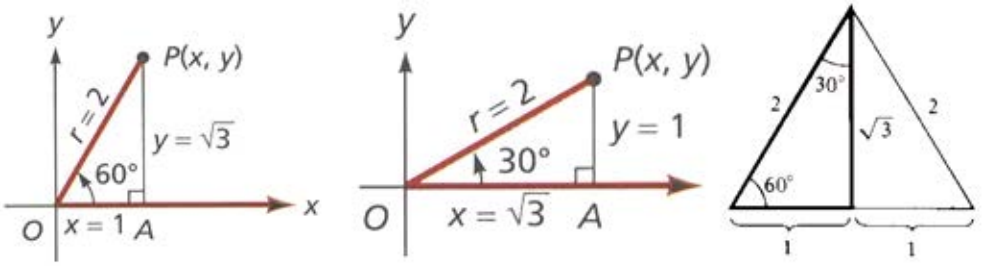
$$cs\,c\,270° = \frac{r}{y} = \frac{1}{-1} = -1 \quad , \quad co\,t\,270° = \frac{x}{y} = \frac{0}{-1} = 0$$

دلته $\tan 270°$ او $se\,c\,270°$ هم غير معين دي.



8.12 شکل

5مثال ($30°$او $60°$ زاويې): متساوي الاضلاع مثلث داسې په پام کې نيسو چې د هرې ضلعې اوږدوالی يې 2 واحده وي(8.13 شکل). که د دې مثلث يوه ميانه چې په عين وخت کې د همدې مثلث ارتفاع هم ده وټاکو، د فيثاغورس د قضيې له مخې ښکاري چې د يادې ارتفاع اوږدوالی $\sqrt{3}$ واحد دی. په دې اساس ارتفاع، دغه مثلث په دوو مثلثونو تقسيم کوي چې د هر مثلث زاويې $30°$ ، $60°$ او $90°$ دي او د مخامخ اضلاعو اوږدوالی يې په ترتيب 1 ، $\sqrt{3}$ او 2 دي.



8.13 شکل

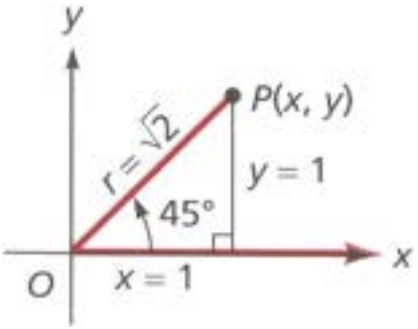
که اوس يو له دغه مثلثونو څخه ستندرد حالت ته واړوو، د تعريف له مخې لرو چې:

$$\sin 30° = \frac{1}{2} \quad , \quad \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad \cos 60° = \frac{1}{2} \quad , \quad \tan 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

د دې زاويې سيکنټ، کوسيکنټ او کوتنجنټ د پاسينيو قيمتونو له معکوس کولو څخه ترلاسه کوو.

6 مثال ($45°$ زاويۀ): قايم الزاويه متساوي الساقين مثلث په پام کې نيسو چې د هر ساق اوږدوالی يې 1 واحد وي. د فيثاغورس قضيې له مخې د دې مثلث د وتر اوږدوالی $\sqrt{2}$ واحد دی(8.14 شکل). دغه مثلث قايم مختصاتو سيستم ته په کتو داسې ټاکو چې پکې 45° زاويه په ستندرد حالت کې واقع شي.



8.14 شکل

$$\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad , \quad \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad , \quad \tan 45° = \frac{1}{1} = 1$$

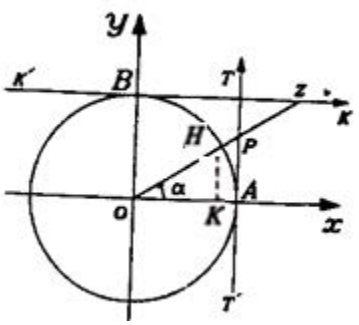
البته د دې زاويو سيکنت ، کوسيکنت او کوتنجنت د پاسينيو قيمتونو له معکوس کېدو څخه ترلاسه کيږي.

د معمولي زاويو مثلثاتي نسبتونه

	0	$\frac{\pi}{6} = 30°$	$\frac{\pi}{4} = 45°$	$\frac{\pi}{3} = 60°$	$\frac{\pi}{2} = 90°$	$\pi = 180°$	$\frac{3\pi}{2} = 270°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞
$\cot\alpha$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	∞	0

واحد دايره: واحد دايره هغه دايره ده چې د شعاع اوږدوالی يې يو واحد يعنې $r = 1$ او مرکز يې د مختصاتو په مبدا واقع وي(8.15 شکل). په لاندې شکل کې چې د واحد دايرې دی OH له افقي محور سره α زاويه جوړوي او $OH = r = 1$ ، نښکاره ده چې:

$$\sin\alpha = \frac{KH}{OH} = \frac{KH}{1} = KH \quad , \quad \cos\alpha = \frac{OK}{OH} = \frac{OK}{1} = OK$$



8.15 شکل

ضمنا په مثلثاتي دايره کې د TT' او KK' مماسونو په پام کې نيولو سره او د مثلثونو تشابه ته په کتو سره لرو چې:

$$\tan\alpha = \frac{AP}{OA} = \frac{AP}{1} = AP \quad , \quad \cot\alpha = \frac{OA}{AP} = \frac{BZ}{OB} = \frac{BZ}{1} = BZ$$

په همدې توګه کولی شو وښيو $\sec\alpha = OP$ او $\csc\alpha = OZ$ ؛ په پايله کې

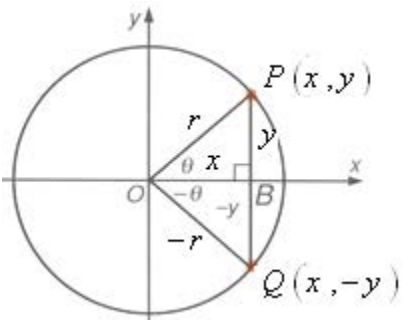
$$\sin\alpha = KH \quad \tan\alpha = AP \quad \sec\alpha = OP$$
$$\cos\alpha = OK \quad , \quad \cot\alpha = BZ \quad , \quad \csc\alpha = OZ$$

په دې اساس شپږ مثلثاتي نسبتونه د مثلثاتي دايرې په پرتله له يوه جهت لرونکې قطعه خط سره مساوي دي چې $\sin\alpha$ او $\cos\alpha$ د عمودي او افقي محور پرمخ، ، $\tan\alpha$ او $\cot\alpha$ د مماسونو پرمخ او بالاخر $\sec\alpha$ او $\csc\alpha$ د دايرې د قاطع پرمخ واقع دي او دې ټولو ته مثلثاتي خطونه وايي.

د مخامخ زاويو مثلثاتي نسبتونه: دوې θ او $-\theta$ زاويې په ستندرد حالت داسې رسموو(8.16 شکل) چې $P(x\ ,\ y)$ او $Q(x\ ,-y)$ نقطې يې د نهايي اضلاعو په مخ پرتې وي، د دې زاويو مثلثاتي نسبتونه عبارت دي له:

$$\begin{cases}\sin\theta = \frac{y}{r}\\ \sin(-\theta) = \frac{-y}{r}\end{cases} \quad , \quad \begin{cases}\cos\theta = \frac{x}{r}\\ \cos(-\theta) = \frac{x}{r}\end{cases} \quad , \quad \begin{cases}\tan\theta = \frac{y}{x}\\ \tan(-\theta) = \frac{-y}{x}\end{cases}$$

په دې اساس



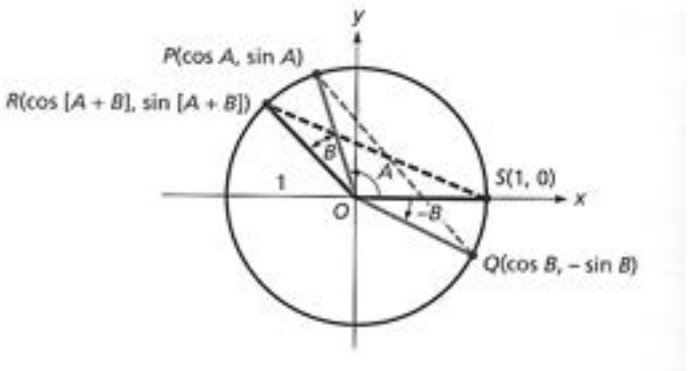
8.16 شکل

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$	$\csc(-\theta) = -\csc\theta$
$\cos(-\theta) = \cos\theta$,	$\sec(-\theta) = \sec\theta$
$\tan(-\theta) = -\tan\theta$	$\cot(-\theta) = -\cot\theta$

8.3 د زاويو د مجموع او تفاضل قوانين

د A ، B او $A \pm B$ زاويو د مثلثاتي نسبتونو ترمنځ اړيکې چې د زاويو د مجموع او تفاضل مثلثاتي نسبتونه نومیږي، عبارت دي له:

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$
$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$
$$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$
$$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$



شکل 8.17

ثبوت: په واحد دايره کې A او $-B$ زاويې په معياري حالت رسموو (8.17 شکل)، R نقطه د واحد دايرې پرمخ داسې په پام کې نيسو چې POR زاويه د B زاويې سره مساوي وي، POQ او ROS مثلثونه متشابه دي. په دې اساس $d(RS) = d(PQ)$ او د P ، Q ، R او S نقطو مختصات عبارت دي له:

$$P : (\cos A \ , \sin A) \quad , \quad R : (\cos[A+B] \ , \sin[A+B])$$
$$Q : (\cos[-B] \ , \sin[-B]) = (\cos B \ , -\sin B) \quad , \quad S : (1 \ , 0)$$

له دې چې $d(RS) = d(PQ)$ دی، نو

$$\sqrt{(\cos[A+B]-1)^2 + (\sin[A+B]-0)^2} = \sqrt{(\cos A - \cos B)^2 + (\sin A + \sin B)^2}$$

يعنې

$$(\cos[A+B]-1)^2 + (\sin[A+B]-0)^2 = (\cos A - \cos B)^2 + (\sin A + \sin B)^2$$

يا

$$\cos^2[A+B] - 2\cos[A+B] + 1 + \sin^2[A+B]$$
$$= \cos^2 A - 2\cos A \cos B + \cos^2 B + \sin^2 A + 2\sin A \sin B + \sin^2 B$$

له دې چې $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ د هرې θ زاويې لپاره صدق کوي، نو پاسيني اړيکه عبارت ده له:

$$1-2\cos[A+B]+1=1-2\cos A\cos B+1+2\sin A\sin B$$
$$\Rightarrow 2-2\cos[A+B]=2-2\cos A\cos B+2\sin A\sin B$$
$$\Rightarrow -2\cos[A+B]=-2\cos A\cos B+2\sin A\sin B$$

د وروستۍ اړيکې دواړې خواوې په -2 تقسيموو، نو ترلاسه کيږي:

$$\boxed{\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B \quad \cdots (1)}$$

اوس له $A-B=A+(-B)$ او (1) مساوات څخه لرو چې

$$\cos(A-B)=\cos[A+(-B)]=\cos A\underbrace{\cos(-B)}_{\cos B}-\sin A\underbrace{\sin(-B)}_{-\sin B}$$

په دې اساس

$$\boxed{\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B \quad \cdots (2)}$$

د $A=\frac{\pi}{2}$ او $B=\theta$ لپاره د (2) مساوات له تطبيق څخه کولی شو وليکو:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\underset{0}{\cos\frac{\pi}{2}}\cos\theta+\underset{1}{\sin\frac{\pi}{2}}\sin\theta$$

نو

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta \qquad \cdots\cdots \qquad (3)}$$

د $\cos\theta$ لپاره $\theta=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ وضع کولو څخه لرو چې

$$\cos\theta=\cos\left\lfloor\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right\rfloor$$
$$=\underset{0}{\cos\frac{\pi}{2}}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\underset{1}{\sin\frac{\pi}{2}}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$
$$=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

په دې اساس

$$\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta \qquad \cdots\cdots \qquad (4)}$$

د (3) او (4) اړيکو او د $\sin(A+B)$ لپاره $A+B=\theta$ تعويض په پام کې نيولو سره لرو چې:

$$\sin(A+B)=\cos\left\lfloor\frac{\pi}{2}-(A+B)\right\rfloor=\cos\left\lfloor\left(\frac{\pi}{2}-A\right)-B\right\rfloor$$
$$=\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}-A\right)}_{\sin A}\cos B+\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}-A\right)}_{\cos A}\sin B$$

نو

$$\boxed{\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B \quad \cdots (5)}$$

او بالاخره د $\sin(A-B)$ د ترلاسه کولو لپاره له (5) اړيکې څخه لرو چې:

$$\sin(A-B)=\sin[A+(-B)]=\sin A\underbrace{\cos(-B)}_{\cos B}+\cos A\underbrace{\sin(-B)}_{-\sin B}$$

په دې اساس

$$\boxed{\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B\ \cdots(6)}$$

1مثال(د زاويو د مجموع تنجنت):

$$\tan(A+B)=\frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)}=\frac{\sin A\cos B+\cos A\sin B}{\cos A\cos B-\sin A\sin B}$$

$$=\frac{\frac{\sin A\cos B}{\cos A\cos B}+\frac{\cos A\sin B}{\cos A\cos B}}{\frac{\cos A\cos B}{\cos A\cos B}-\frac{\sin A\sin B}{\cos A\cos B}}=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$$

$$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$$

که په وروستۍ اړیکه کې B په $-B$ تعویض شي ترلاسه کوو چې:

$$\boxed{\tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}}$$

2 **مثال:** وښیئ چې $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cot\theta$ او $\cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\tan\theta$ دي.

حل: د (3) او (4) اړیکو په پام کې نیولو سره لرو چې:

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\cot\theta$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta$$

3 **مثال:** د زاویو مجموع او تفاضل قوانینو په کارولو سره، لاندې اړیکې په آسانۍ ثبوت کړئ شي:

i. $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$, $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$

ii. $\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$, $\cot(\pi-\theta)=-\cot\theta$

iii. $\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$, $\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$

iv. $\tan(\pi+\theta)=\tan\theta$, $\cot(\pi+\theta)=\cot\theta$

v. $\sin(2\pi+\theta)=\sin\theta$, $\cos(2\pi+\theta)=\cos\theta$

vi. $\tan(2\pi+\theta)=\tan\theta$, $\cot(2\pi+\theta)=\cot\theta$

vii. $\sin(2\pi-\theta)=\sin\theta$, $\cos(2\pi-\theta)=\cos\theta$

viii. $\tan(2\pi-\theta)=-\tan\theta$, $\cot(2\pi-\theta)=-\cot\theta$

$$ix.\quad \sin\left(\tfrac{\pi}{2}+\theta\right)=\ \cos\theta\ \ ,\ \ \cos\left(\tfrac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$$
$$x.\quad \tan\left(\tfrac{\pi}{2}+\theta\right)=-\cot\theta\ \ ,\ \ \cot\left(\tfrac{\pi}{2}+\theta\right)=-\tan\theta$$

د دوه چنده زاويو قوانين: که د جمع په فورمولونو کې $A=B=\alpha$ تعويض شي، نو لرو چې:

$$\sin(2\alpha)=\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha$$

يعنې

$$\boxed{\sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha}$$

په همدې توګه

$$\boxed{\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\ ,\ \tan(2\alpha)=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}}$$

د نيمايي زاويو قوانين: د زاويو د دوچند قوانينو په کارولو سره لرو چې:

$$\cos(2x)=\cos^2x-\sin^2x\ \Rightarrow\cos(2x)=(1-\sin^2x)-\sin^2x$$
$$\Rightarrow\cos(2x)=1-2\sin^2x\ \Rightarrow\sin^2x=\tfrac{1}{2}(1-\cos(2x))$$

په ورته ډول

$$\cos(2x)=\cos^2x-\sin^2x\ \Rightarrow\cos(2x)=\cos^2x-(1-\cos^2x)$$
$$\Rightarrow\cos(2x)=-1+2\sin^2x\ \Rightarrow\cos^2x=\tfrac{1}{2}(1+\cos(2x))$$

په پايله کې دوه لاندې فورمولونه ترلاسه کيږي:

$$\boxed{\sin^2x=\tfrac{1}{2}[1-\cos(2x)]\ \ ,\ \ \cos^2x=\tfrac{1}{2}[1+\cos(2x)]}$$

وروستۍ اړيکه د لوړ توان لرونکو مثلثاتي توابعو په انتګرال نيونه کې کاريږي.

د تنجنت له جنسه د نيمايي زاويې مثلثاتي نسبتونه: د نيمايي زاويو د اړيکو په کارولو سره کولی شو وليکو:

$$\sin x\ =\ 2\sin\tfrac{x}{2}\cos\tfrac{x}{2}\ =\ \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{1}\ =\ \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\frac{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}=\frac{2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{\frac{\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}+\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}=\frac{\frac{2\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{1+\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right)^2}=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$$

په همدې توګه $\cos\alpha$ او $\tan\alpha$ هم د $\tan\frac{\alpha}{2}$ له جنسه ښودل کيږي، چې ترلاسه کول او ثبوت يې د کورنۍ دندې په توګه تاسې ته پرېښودل کيږي، په پايله کې

$$\boxed{\sin x=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}\ ,\ \cos x=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}\ ,\ \tan x=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}}$$

دغه اړيکې د ځينو غير ناطق توابعو په تعويضي انتګرال نيونه کې کاريږي.

8.4 د مثلثاتي نسبتونو د ضرب قوانين

د مثلثاتي نسبتونو حاصل ضرب کولی شو په اړونده مجموع يې واړوو ، پوهيږو چې:

$$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$$
$$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$$

له دې ځايه لرو چې:

$$\sin(A+B)+\sin(A-B)=2\sin A\cos B$$
$$\Rightarrow \sin A\cos B=\frac{1}{2}\left[\sin(A+B)+\sin(A-B)\right]$$

په همدې توګه د بيلابيلو نسبتونو ضرب حاصل ترلاسه کيږي.

په دې اساس

$$\sin A\cos B=\frac{1}{2}\left[\sin(A+B)+\sin(A-B)\right]$$
$$\cos A\sin B=\frac{1}{2}\left[\sin(A+B)-\sin(A-B)\right]$$
$$\cos A\cos B=\frac{1}{2}\left[\cos(A+B)+\cos(A-B)\right]$$
$$\sin A\sin B=\frac{1}{2}\left[\cos(A-B)-\cos(A+B)\right]$$

که په دغه اړيکو کې $x=A+B$ او $y=A-B$ په پام کې ونيسو $A=\frac{x+y}{2}$ او $B=\frac{x-y}{2}$ ترلاسه کيږي. په دې اساس د ضرب فورمولونه لاندې شکل ځانته غوره کوي.

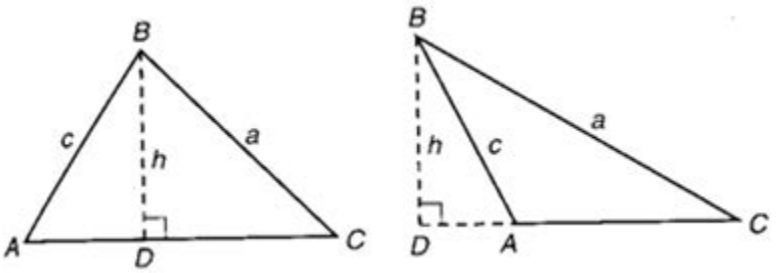
$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$
$$\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$
$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$
$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

8.5 د مثلث د زاويو مثلثاتي نسبتونو قوانين

د ساينونو قانون: که چېرې د يوه مثلث داخلي زاويې A ، B او C وي مخامخ اضلاع يې په ترتيب a ، b او c وي(8.18 شکل)، نو

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

يعنې د يوه مثلث د زاويو ساينونه د مخامخ اضلاعو سره يې متناسب دي.



8.18 شکل

ثبوت: له 8.18 شکل څخه ليدل کيږي چې:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{h}{c}=\sin A \Rightarrow h=c\sin A\\ \frac{h}{a}=\sin C \Rightarrow h=a\sin C\end{array}\right\} \Rightarrow c\sin A=a\sin C \Rightarrow \frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$$

په همدې توګه د مثلث د دويمې ارتفاع په پام کې نيولو سره ترلاسه کيږي چې:

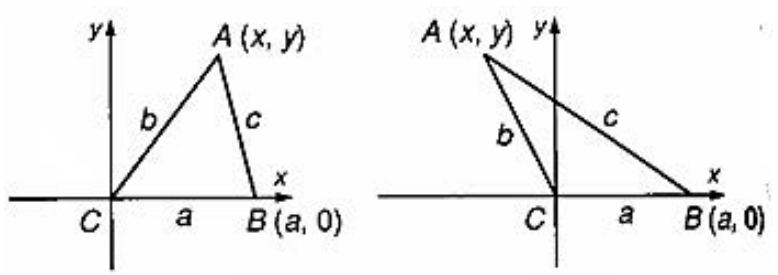
$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

د دوو $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$ او $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ اړيکو له پرتله کولو څخه پايله ترلاسه کيږي چې:

$$\boxed{\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}}$$

د کوساينونو قانون: په هر مثلث کې د هرې ضلعې مربع د دوو پاتې ضلعو له مربع څخه د هماغه دوو ضلعو او د دوی ترمنځ د زاويې کوساين د حاصل ضرب په اندازه وړوکې ده، يعنې که د يوه مثلث داخلي زاويې A ، B او C او مخامخ اضلاع يې په ترتيب a ، b او c وي، نو

$$\boxed{\begin{cases}a^2=b^2+c^2-2bc\cos A\\ b^2=a^2+c^2-2ac\cos B\\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C\end{cases}}$$



8.19 شکل

ثبوت: ABC مثلث قايم مختصاتو ته په کتو له شکل سره سم داسې اعيارووچې C راس يې د مختصاتو په مبدا او CB ضلع د Ox محور په مثبت لوري منطبق وي(8.19 شکل)، اوس د $B(a,0)$ او $A(x,y)$ نقطو ترمنځ واټن چې له c څخه عبارت دی په لاندې توګه شمېرو:

$$c=\sqrt{(x-a)^2+(y-0)^2}\Rightarrow c^2=(x-a)^2+y^2$$

د دې په پام کې نیولو سره چې $x=b\cos C$ او $y=b\sin C$ وي، لرو چې:

$$c^2=(b\cos C-a)^2+(b\sin C)^2$$
$$\Rightarrow c^2=a^2-2ab\cos C+b^2\cos^2 C+b^2\sin^2 C$$
$$\Rightarrow c^2=a^2-2ab\cos C+b^2(\cos^2 C+\sin^2 C)$$
$$\Rightarrow c^2=a^2-2ab\cos C+b^2$$
$$\Rightarrow c^2=a^2-2ab\cos C+b^2$$
$$\Rightarrow c^2=a^2-2ab\cos C+b^2$$

دوې نورې اړیکې هم په همدې طریقه ثبوت کیږي. •

8.6 د مثلثاتي توابعو پېژندل

$f(x)=\sin x$ تابع د x ټولو حقیقي اعدادو لپاره، د sin تابع ده او د x زاویې اندازه د رادیان په حساب ده. ورته تعریف د $\cos in$ ، tan ، cot ، sec او csc توابعو لپاره هم مطرح کیږي.

د مثلثاتي توابعو تناوب: f تابع ته؛ p تناوب درلودونکې متناوب(پریودیک) تابع وایي، که چېرې $P\neq 0$ تر ټولو وړوکی مثبت عدد وي چې له D_f څخه هر x عدد ته، $x+p$ عدد هم په D_f کې شامل وي او $f(x+p)=f(x)$ شي، مثلا $f(x)=\sin x$ متناوب ده او د تناوب دور يې 2π دی، ځکه چې $f(x+2\pi)=\sin(x+2\pi)=\sin x$ په همدې توګه $g(x)=\cos x$ تابع متناوب ده او تناب يې 2π دی.

مثال: د $f(x)=\sin 4x$ تابع تناوب وټاکئ.

حل: فرضا p د $f(x)$ تابع تناوب وي، په دې صورت کې

$$f(x+p)=f(x)\Rightarrow \sin[4(x+p)]=\sin 4x\Rightarrow \sin(4x+4p)=\sin 4x$$
$$\Rightarrow 4p=2\pi\Rightarrow p=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$$

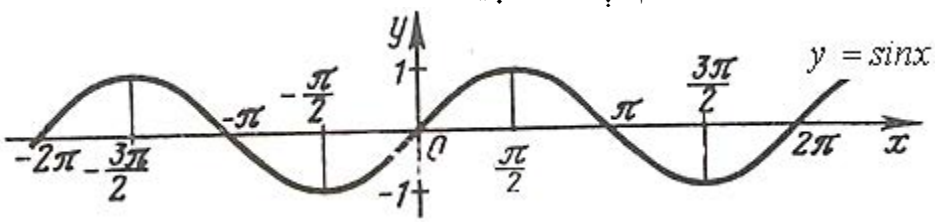
په دې اساس د $f(x)$ تابع پریود عبارت دی له $p=\frac{\pi}{2}$ څخه.

د ساين او کوساين توابعو ګرافونه: پوهيږو چې د $y=\sin x$ او $y=\cos x$ توابعو تناوب 2π عدد دی، په دې اساس د يادو توابعو ګراف په تاکلي انتروال کې د 2π اوږدوالی په درلودو سره

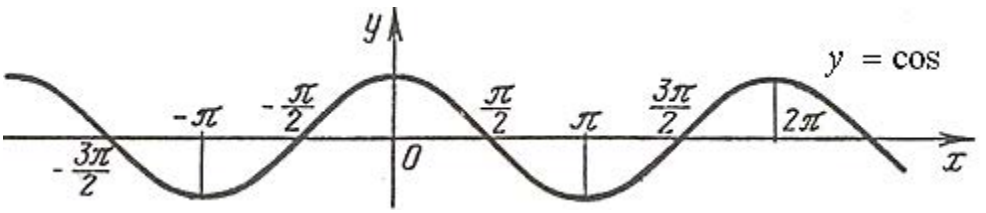
تکراريږي، په دې اساس د دې تابع ګراف په $[0\ ,\ 2\pi]$ انټروال کې رسميږي (8.20 شکل) او (8.21 شکل).

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0
$\cos x$	1	0	-1	0	1

د يادولو وړ ده چې د زاويې واحد (د x قيمت) د راديان له جنسه شمېرل کيږي، او په دې توګه $\pi = 3.14$ او $2\pi = 6.28$ په پام کې نيول کيږي. $y = \cos$ $y = sinx$



8.20 شکل



8.21 شکل

يعنې ليدل کيږي چې د دوو $\sin x$ او $\cos x$ تابع د تعريف ناحيه حقيقي اعداد دي او د قيمتونو ناحيه يې [-1,1] انټروال دی، يعنې

$$D_{\sin} = D_{\cos in} = \mathbb{R} \quad , \quad R_{\sin} = R_{\cos in} = [-1, 1]$$

ضمنا $\sin x$ تابع تاق او $\cos x$ تابع جفت ده ځکه چې:

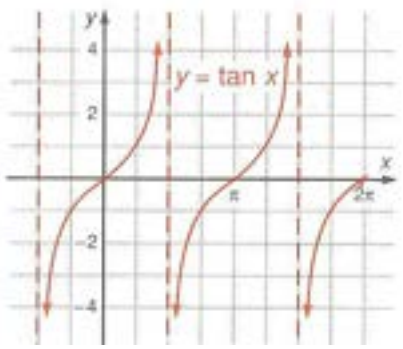
$$\sin(-x) = -\sin x \quad , \quad \cos(-x) = \cos x$$

د تنجنت او کوتنجنت توابعو ګراف: له دې چې $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ او $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ دی، نو ځکه

$$D_{\tan} = \{x \in \mathbb{R} : \cos x \neq 0\} \quad , \quad D_{\cot} = \{x \in \mathbb{R} : \sin x \neq 0\}$$

tan او cot توابع متناوب دي او تناوب يې π دی. د $y = \tan x$ ګراف کولی شو په $\left(-\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2}\right)$ انټروال کې مطالعه کړو (8.22 شکل).

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
tanx	$-\infty$	-1	0	1	∞

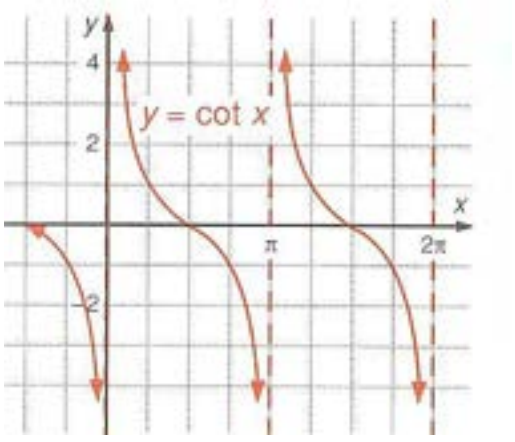


8.22 شکل

$x = \pm\frac{\pi}{2}$ مستقيمونه د $y = \tan x$ منحني مجانبونه دي.

په همدې توګه د $y = \cot x$ لپاره په $[0\ ,\ \pi]$ انتروال کې لرو چې:

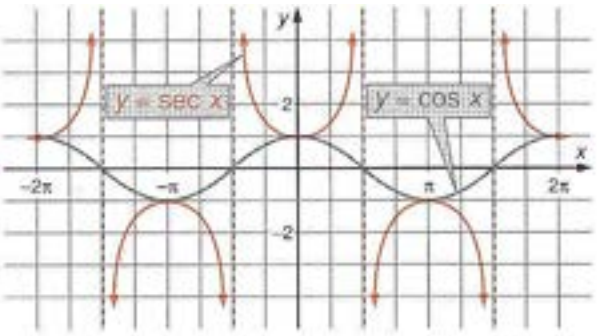
x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$\cot x$	∞	1	0	-1	$-\infty$



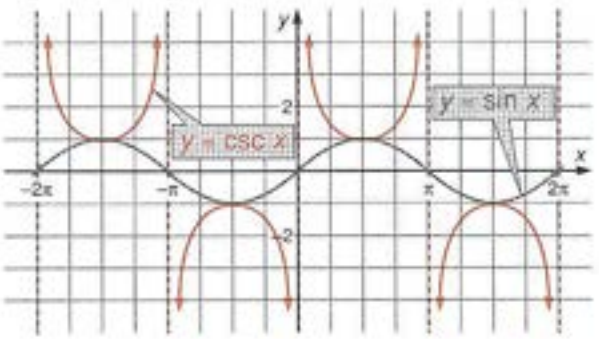
8.23 شکل

$x = 0$ او $x = \pi$ مستقيمونه د $y = \cot x$ عمودي مجانبونه دي(8.23 شکل).

د سيکنت او کوسيکنت توابعو ګراف: د $y = \sec x$ او $y = \csc x$ توابعو ګرافونه د ساين او کوساين توابعو په پرتله رسموو(8.24 شکل) او (8.25 شکل).



8.24 شکل



8.25 شکل

د مثلثاتي توابعو د تعريف او قيمتونو ناحيې

تابع	د تابع د تعريف ناحيه	د تابع د قيمتونو سيټ
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$[-1\ ,\ 1]$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$[-1\ ,\ 1]$
$\tan x$	$D_{\tan} = \{x : x \in \mathbb{R}, \cos x \neq 0\}$	$(-\infty\ ,\ \infty)$
$\cot x$	$D_{\cot} = \{x : x \in \mathbb{R}, \sin x \neq 0\}$	$(-\infty\ ,\ \infty)$
$\sec x$	$D_{\sec} = \{x : x \in \mathbb{R}, \cos x \neq 0\}$	$(-\infty\ ,\ -1] \cup [1\ ,\ \infty)$
$\csc x$	$D_{\csc} = \{x : x \in \mathbb{R}, \sin x \neq 0\}$	$(-\infty\ ,\ -1] \cup [1\ ,\ \infty)$

8.7 معکوس مثلثاتي توابع

هيڅ يوه مثلثاتي توابع هم يو په يو نه ده، په دې اساس ويلی شو چې مثلثاتي توابع په عمومي توګه معکوس نلري، خو کولی شو د تعريف ناحيې يې داسې محدودې کړو چې اړوند توابع په ((يو په يو)) توابعو واوړي، په دې صورت کې بيا معکوس لرونکي توابعو باندې اوړي. د دې توابعو د تعريف ناحيو د محدود کولو يو تر ټولو معمول امکان په لاندې توګه مطرح کيږي:

معکوس لرونکي مثلثاتي توابع

تابع	د تابع تعريف ناحيه	د تابع قيمتونو سيټ
$\sin x$	$\left\lfloor -\frac{\pi}{2} , \frac{\pi}{2} \right\rfloor$	$[-1 , 1]$
$\cos x$	$[0 , \pi]$	$[-1 , 1]$
$\tan x$	$\left(-\frac{\pi}{2} , \frac{\pi}{2}\right)$	$(-\infty , \infty)$
$\cot x$	$(0 , \pi)$	$(-\infty , \infty)$
$\sec x$	$\left[0 , \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} , \pi\right]$	$(-\infty , -1] \cup [1 , \infty)$
$\csc x$	$\left[-\frac{\pi}{2} , 0\right) \cup \left(0 , \frac{\pi}{2}\right]$	$(-\infty , -1] \cup [1 , \infty)$

له دې چې پاسيني توابع يو په يو دي، په دې اساس معکوس توابع هم لري، چې د لاندې جدول له مخې تعريف کيږي.

معکوس مثلثاتي توابع

تابع	د تابع د تعريف ناحيه	د تابع د قيمتونو سيټ
$arc\sin x$	$[-1 , 1]$	$\left\lfloor -\frac{\pi}{2} , \frac{\pi}{2} \right\rfloor$
$arc\cos x$	$[-1 , 1]$	$[0 , \pi]$
$arc\tan x$	$(-\infty , \infty)$	$\left(-\frac{\pi}{2} , \frac{\pi}{2}\right)$
$arc\cot x$	$(-\infty , \infty)$	$(0 , \pi)$
$arc\sec x$	$(-\infty , -1] \cup [1 , \infty)$	$\left[0 , \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} , \pi\right]$
$arc\csc x$	$(-\infty , -1] \cup [1 , \infty)$	$\left[-\frac{\pi}{2} , 0\right) \cup \left(0 , \frac{\pi}{2}\right]$

د $\arcsin x$ ، $\arccos x$ ، $\arctan x$ ، $arc\cot x$ ، $arc\sec x$ ، $arc\csc x$ اصطلاحاتو په ځای په ترتيب $\sin^{-1} x$ ، $\cos^{-1} x$ ، $\tan^{-1} x$ ، $\cot^{-1} x$ ، $\sec^{-1} x$ او $\csc^{-1} x$ اصطلاحات کارووو. له دې وروسته يوازې $\arcsin x$ ، $\arccos x$ ، $\arctan x$ او $\operatorname{arc}\cot x$ ، توابع مطرح کوو.

د مثلثاتي او معکوس توابعو ترمنځ اړيکې

1. مثلثاتي توابع او اړونده معکوس يې له يوه بل سره په لاندې توګه مربوط کيږي:

$$x = \sin y \quad \Leftrightarrow \quad y = \arcsin x \quad , \quad x = \cos y \quad \Leftrightarrow \quad y = \arccos x$$

$$x = \tan y \quad \Leftrightarrow \quad y = \arctan x \quad , \quad x = \cot y \quad \Leftrightarrow \quad y = \operatorname{arc}\cot x$$

2. پوهيږو چې که f او f^{-1} د يوه بل معکوس وي، په دې صورت کې $(f \circ f^{-1})(x) = x$ او $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ دي، په دې اساس د مثلثاتي او معکوس توابعو لپاره يې لرو چې

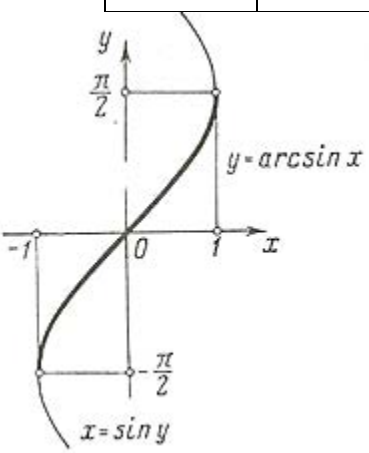
$$\sin(\arcsin x) = x \quad , \quad \arcsin(\sin x) = x \quad , \quad \cos(\arccos x) = x$$

$$\operatorname{arc}\cos(\cos x) = x \quad , \quad \tan(\arctan x) = x \quad , \quad \operatorname{arc}\tan(\tan x) = x$$

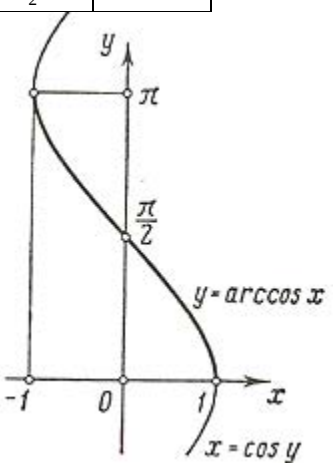
د معکوس مثلثاتي توابعو ګرافونه

له دې چې معکوس توابع او اصلي توابع نظر $y = x$ مستقيم خط ته متناظر دي، په دې اساس ګرافونه يې د توابعو ګرافونو په مرسته رسميږي. ضمنا د معکوس توابعو د ځينو محدود قيمتونو په ټاکلو سره ګرافونه يې رسميږي. دلته يوازې د ساين او کوساين د معکوس توابعو ځينې قيمتونه ټاکلي او ګرافونه يې رسم ترې رسم کړي(8.27 شکل) او (8.28 شکل).

x	-1	0	1
$\arcsin x$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
$arc\cos x$	π	$\frac{\pi}{2}$	0

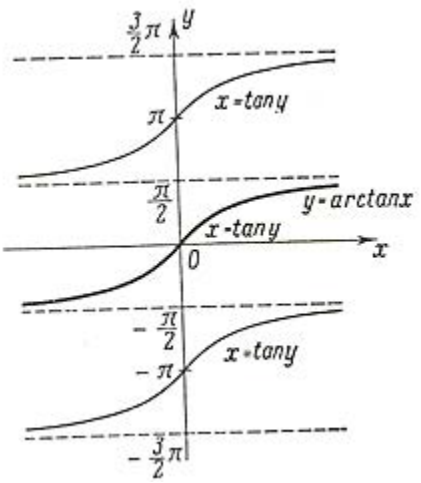


8.26 شکل

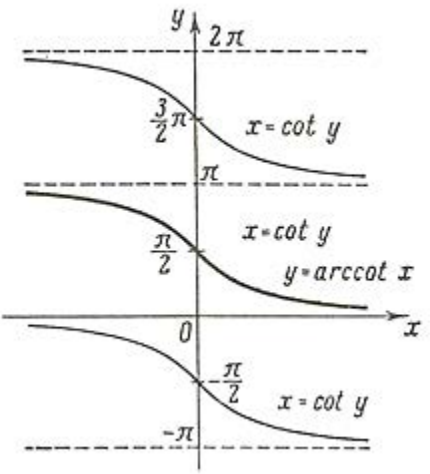


8.27 شکل

د تنجنت، کوتنجنت، سيکنت او کوسيکنت معکوس توابعو ګرافونه، $y = x$ مستقيم ته پ کتو د توابعو متناظر والي په اساس رسميږي(8.29 شکل) او (8.30 شکل).



8.28 شکل



8.29 شکل

1 **مثال:** $\arcsin\frac{1}{2}$ او $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$ مفاهيم وشمېرئ.

حل : که $\arcsin\frac{1}{2}=\theta$ او $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\alpha$ په پام کې ونيول شي، نو

$$\arcsin\tfrac{1}{2}=\theta\Rightarrow\sin\theta=\tfrac{1}{2}\Rightarrow\theta=\tfrac{\pi}{6}\Rightarrow\arcsin\tfrac{1}{2}=\tfrac{\pi}{6}$$

$$\arcsin\tfrac{\sqrt{2}}{2}=\alpha\Rightarrow\sin\alpha=\tfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\alpha=\tfrac{\pi}{4}\Rightarrow\arcsin\tfrac{\sqrt{2}}{2}=\tfrac{\pi}{4}$$

2 **مثال:** $\arcsin\left(\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ عدد ترلاسه کړئ.

حل :

$$\left.\begin{matrix}f(x)&=&\sin x\\ f^{-1}(x)=\arcsin x\end{matrix}\right\}\Rightarrow f^{-1}(f(x))=x\Rightarrow\arcsin(\sin x)=x\Rightarrow\arcsin\left(\sin\left(-\tfrac{\pi}{4}\right)\right)=-\tfrac{\pi}{4}$$

3 **مثال:** $arc\cos\left(-\frac{1}{2}\right)$ ، $arc\cos(0)$ او $arc\cos(1)$ اعداد ترلاسه کړئ.

حل:

$$arc\cos\left(-\tfrac{1}{2}\right)=\alpha\Rightarrow\cos\alpha=-\tfrac{1}{2}\Rightarrow\alpha=\tfrac{2\pi}{3}\Rightarrow arc\cos\left(-\tfrac{1}{2}\right)=\tfrac{2\pi}{3}$$

$$arc\cos(0)=\beta\Rightarrow\cos\beta=0\Rightarrow\beta=\frac{\pi}{2}\Rightarrow arc\cos(0)=\frac{\pi}{2}$$

$$arc\cos(1)=\gamma\Rightarrow\cos\gamma=1\Rightarrow\gamma=0\Rightarrow arc\cos(1)=0$$

4 **مثال:** ثبوت کړئ چې:

$$\arcsin x=\arccos\sqrt{1-x^2}=\arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

ثبوت: فرض کوو چې $\arcsin x=\theta$ وي په دې صورت کې:

$$sin\theta=x\Rightarrow\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-x^2}\Rightarrow\theta=\arccos\sqrt{1-x^2}\cdots(i)$$

له بل پلوه

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\Rightarrow\tan\theta=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\Rightarrow\theta=\arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\cdots(ii)$$

د (i) او (ii) له پرتله کولو څخه فرضيه ترلاسه کيږي چې:

$$\arcsin x=\arccos\sqrt{1-x^2}=\arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

5 **مثال:** وښيئ چې $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$ دی.

حل: $\arcsin x=\alpha$ او $\arccos x=\beta$ وضع کوو، په دې اساس

$$\sin\alpha=x=\cos\beta\Rightarrow\sin\alpha=\cos\beta$$

په دې توګه

$$\alpha=\frac{\pi}{2}-\beta\Rightarrow\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$$

6 **مثال:** وښيئ چې

$$\arctan x = arc\cot\frac{1}{x} = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

حل: بياهم وضع کوو

$$\arctan x = \theta \qquad \cdots \qquad (i)$$

په دې اساس

$$\tan\theta = x \Rightarrow cat\,\theta = \frac{1}{\tan\theta} \Rightarrow cat\,\theta = \frac{1}{x}$$

له دې ځايه لرو چې:

$$arc\cot\frac{1}{x} = \theta \qquad \cdots \qquad (ii)$$

له بل پلوه

$$\sin\theta = \frac{\sin\theta}{1} = \frac{\sin\theta}{\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}} = \frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\sqrt{\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}} = \frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

يعنې $\sin\theta = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ دی او په پايله کې

$$\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \theta \qquad \cdots \qquad (iii)$$

بالآخره

$$\cos\theta = \frac{\cos\theta}{1} = \frac{\cos\theta}{\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}} = \frac{\frac{\cos\theta}{\cos\theta}}{\sqrt{\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

نو $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ دی، په دې اساس

$$\arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \theta \qquad \cdots \qquad (iv)$$

په پايله کې د (i) ، (ii) ، (iii) او (iv) له پرتله کولو څخه ترلاسه کيږي چې:

$$\arctan x \;\; \arctan x = arc\cot\frac{1}{x} = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

7 **مثال:** وښيئ چې:

$$\arctan x + \arctan y = \arctan\frac{x+y}{1-xy} \;,\; xy \neq 1$$

حل: که $\arctan x = \alpha$ او $\arctan y = \beta$ فرض شي ، په دې صورت کې

$$\tan\alpha = x\ ,\ \tan\beta = y\ ,\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\Rightarrow \tan(\alpha+\beta) = \frac{x+y}{1-xy} \Rightarrow \alpha+\beta = \arctan\frac{x+y}{1-xy}$$

په وروستۍ اړیکه کې د α او β په ځای په ترتیب $\arctan x$ او $\arctan y$ وضع کوو ، ترلاسه کیږي چې:

$$\arctan x + \arctan y = \arctan\frac{x+y}{1-xy} \quad \bullet$$

8.9 د څېرکي لنډیز

د رجه هغه زاویه ده چې وسعت(پراختیا) یې د ساعت ستنې خلاف د یوه بشپړ دوران $\frac{1}{360}$ مه برخه وي.

را د یان هغه مرکزي زاویه ده چې د مقابل قوس اوږدوالی یې د دایرې له شعاع سره مساوي وي.

د دایرې د محیط او قطر نسبت $\frac{c}{2r} = \pi \approx 3.1415926535\cdots$

د رادیان او درجې ترمنځ اړیکې $\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$

د دایرې د قوس اوږدوالی $l = r\theta$

د دایرې مساحت $A = \pi r^2$

د دایرې د قطاع مساحت $K = \frac{1}{2}\theta r^2$

مثلثاتي نسبتونه. که $(x\ ,y)$ په معیاري حالت کې د زاویې د دویمې ضلعې تاکلې نقطه وي، نو

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \quad , \quad \cos\theta = \frac{x}{r} \quad , \quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$\csc\theta = \frac{r}{y} \quad , \quad \sec\theta = \frac{r}{x} \quad , \quad \cot\theta = \frac{x}{y}$$

د مثلثاتي نسبتونو ترمنځ اړیکې:

$$\sin\theta = \frac{1}{\csc\theta} \quad , \quad \cos\theta = \frac{1}{sec\theta} \quad , \quad \tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad , \quad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \quad , \quad \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$1+\tan^2\theta = \sec^2\theta \quad , \quad 1+\cot^2\theta = \csc^2\theta$$

واحد دایره: واحد دایره هغه دایره ده چې د شعاع اوږدوالی یې یو واحد یعنې $r = 1$ وي او مرکز یې د مختصاتو په مبدا کې واقع وي.

د جمع فورمولونه:

$$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$$
$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$$
$$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$$
$$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$$

د دوه چنده زاويو قوانين.

$$\sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\ ,\ \tan(2\alpha)=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

د نيمايي زاويو قوانين.

$$\sin^2 x=\tfrac{1}{2}\left(1-\cos(2x)\right)\quad ,\quad \cos^2 x=\tfrac{1}{2}\left(1+\cos(2x)\right)$$
$$\sin x=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}\ ,\ \cos x=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}\ ,\ \tan x=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}$$

د مثلثاتي نسبتونو د ضرب فورمولونه.

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$
$$\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$
$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$
$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

په مثلث کې د ساينونو قانون.

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

په مثلث کې د کوساينونو قانون.

$$\begin{cases}a^2=b^2+c^2-2bc\cos A\\ b^2=a^2+c^2-2ac\cos B\\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C\end{cases}$$

د معکوس مثلثاتي توابعو ځينې اړيکې.

$$i.\quad \arcsin x=\arccos\sqrt{1-x^2}=\arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$ii.\quad \arctan x=arc\cot\frac{1}{x}=\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

iii. $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$

iv. $\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$, $xy \neq 1$

8.10 تمرين

د لاندې زاويو مثلثاتي نسبتونه وټاکئ:

1. $120°$, 2. $225°$, 3. $-30°$, 4. $-45°$

د لاندې مثلثاتي افادو قيمت د $\sin\alpha$ او $\cos\alpha$ له جنسه تر لاسه کړئ:

5. $\sin\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)$, 6. $\sin\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right)$

7. $\cos\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)$, 8. $\cos\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right)$

د لاندې مثلثاتي افادو قيمت د $\tan\alpha$ او $\cot\alpha$ له جنسه تر لاسه کړئ:

9. $\tan\left(\frac{7\pi}{2}-\alpha\right)$, 10. $\tan\left(\frac{7\pi}{2}+\alpha\right)$

11. $\cot\left(\frac{7\pi}{2}-\alpha\right)$, 12. $\cot\left(\frac{7\pi}{2}+\alpha\right)$

13. د $105°$ او $195°$ زاويو مثلثاتي نسبتونه تر لاسه کړئ.

14. که چېرې $\cos\alpha = \frac{2}{3}$ وي او $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$ شي، لاندې افادې وشمېرئ:

i. $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$, *ii*. $\cos(4\pi-\alpha)$, *iii*. $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$

15. که $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ او $\cos\beta = \frac{3}{4}$ وي $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$ او $\beta \leq \frac{\pi}{2}$ شي، د لاندې افادو قيمتونه وشمېرئ:

i. $\sin(\alpha+\beta)$, *ii*. $\cos(\alpha+\beta)$, *iii*. $\tan(\alpha+\beta)$

iv. $\cot(\alpha+\beta)$, *v*. $\sin(\alpha-\beta)$, *vi*. $\cos(\alpha-\beta)$

vii. $\tan(\alpha-\beta)$, *viii*. $\cot(\alpha-\beta)$, *ix*. $\sin 2\alpha$

د لاندې مثلثاتي توابعو ګرافونه رسم کړئ:

16. $y = -\sin x$, 17. $y = -\cos x$, 18. $y = -2\cos x$

19. $y = \sin(x-1)$, 20. $y = \cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$, 21. $y = \cos x + 1$

لاندې مقدارونه وشمېرئ:

22. $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$, 23. $\arcsin(-1)$, 24. $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$

25. $\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)$, 26. $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$, 27. $\tan\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

28. $\cos\left(\arccos\frac{1}{4}\right)$, 29. $\tan\left(\arccos\frac{1}{2}\right)$, 30. $\sin\left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

31. $\cot\left(arc\cot(-1)\right)$, 32. $\cot\left(arc\cot 9\right)$, 33. $arc\cot(-1)$

نهم څپرکی
د توابعو لیمت او تمادیت

لیمت، د توابعو د نهایي او یا مبهم قیمتونو د بدلون مسیر ټاکلو څخه عبارت دی، د ریاضیاتو عمومي مسایل لکه مشتق، انتګرال، لړۍ او داسې نور د لیمت مفهوم په ذریعه تعریف او توضیح کیږي. د ریاضي هغه برخې چې د لیمت مفهوم په پام کې نیولو سره څېړل کیږي د ریاضي آنالیز، تفاضلي حساب او انتګرال یا کلکولس (*calculus*) په نامه یادیږي. په دې څپرکي کې د توابعو لیمت په لنډه توګه مطالعه کوو.

9.1 د لیمت معرفي

د متحول تقرب. ویل کیږي چې x متحول a ټاکلي عدد ته تقرب کوي، په هغه صورت کې چې x په خپل زړه وکولی شي a ته نږدي شي، یعنې د x او a ترمنځ تو پیر د هر $\delta > 0$ وړوکې عدد څخه هم وړوکی وي. پاسینی مفهوم په سمبولیک ډول د لاندې افادې معادل دی:

$$\forall \delta > 0 : |x-a| < \delta \quad \text{يا} \quad \lim x = a \quad \text{يا} \quad x \to a \quad \text{يا} \quad |x-a| \to 0$$

له ښي لوري څخه د متحول تقرب $(x \to a^+)$: کې د x قیمتونو یو متناقص ترادف موجود وي، داسې چې تدریجا په خپله خوښه a ته لنډ شي، لکه

$$x : a+0.1 \ , \ a+0.01 \ , \ a+0.001 \ , \ a+0.0001 \ , \ \cdots \to a^+$$

له کیڼ لوري څخه د متحول تقرب $(x \to a^-)$: کې چېرې په متزاید ترادف کې د x قیمتونو وټاکل شي، داسې چې تدریجا په خپله خوښه a ته لنډ شي، لکه

$$x : a-0.1 \ , \ a-0.01 \ , \ a-0.001 \ , \ a-0.0001 \ , \ \cdots \to a^-$$

نو a عدد ته د x متحول تقرب، د دوو (ښي او کیڼ) خواوو له تقرب سره معادل دی، یعنې

$$x \to a \quad \Leftrightarrow \quad (x \to a^+, x \to a^-)$$

1مثال: x متحول، 4 عدد ته متقرب کړی، په بل عبارت $x \to 4$ مفهوم توضیح کړئ.

حل:

$$\left.\begin{array}{l} x : 4.1 \ , \ 4.01 \ , \ 4.001 \ , \ 4.0001 \ , \ \ldots \to 4^+ \\ x : 3.9 \ , \ 3.99 \ , \ 3.99 \ , \ 3.999 \ , \ \ldots \to 4^- \end{array}\right\} \Leftrightarrow x \to 4$$

د لیمت مفهوم: که چېرې $f(x)$ تابع په یوه خلاص انتروال کې چې a عدد پکې شامل وي، تعریف شوې وي (ان که په a که تعریف شوې نه وي هم)، a عدد ته د x متحول له تقرب څخه $f(x)$ په خپله خوښه l عدد ته لنډیږي، ویل کیږي که چېرې x متحول a عدد ته تقرب وکړي د $f(x)$ تابع لیمت عبارت دی له l څخه

$\lim_{x\to a} f(x)=l \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists \delta>0 : a-\delta<x<a+\delta \Rightarrow l-\varepsilon<f(x)<l+\varepsilon$ او داسې يې ليکي چې:

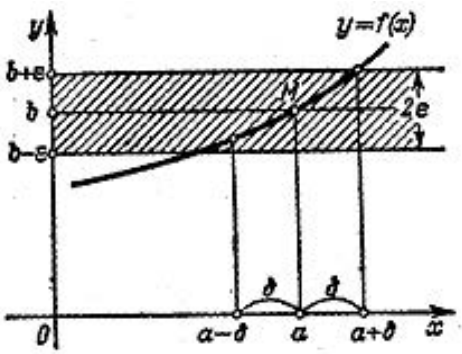
$$\lim_{x\to a} f(x)=l \quad \text{يا} \quad f(x)\to l \Leftrightarrow x\to a$$

پاسينى عبارت د بيلابيلو توپولوژيکي بيانونو په ذريعه تعريف او توضيح کوي.

د ليمت تعريف: د $f(x)$ تابع ليمت l عدد دى کله چې x متحول a عدد ته تقرب وکړي(9.1 شکل)، که د هر مثبت ε عدد لپاره δ مثبت عدد موجود وي داسې چې له $|x-a|<\delta$ نامساوات څخه $|f(x)-l|<\varepsilon$ نامساوات ترلاسه شي او ليکو چې $\lim_{x\to a} f(x)=l$. دغه تعريف د لاندې دريو سمبولیک عباراتو په ذريعه افاده کيږي:

$$\lim_{x\to a} f(x)=l \Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 : 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon\right)$$

$$\lim_{x\to a} f(x)=l \quad \Leftrightarrow \quad \left(|x-a|\to 0 \Rightarrow |f(x)-l|\to 0\right)$$



9.1 شکل

د ښي لور ليمت: $f(x)$ تابع په a عدد کې د ښي لور ليمت l_1 لري که چېرې د هر $\varepsilon>0$ لپاره، $\delta>0$ وړوکی عدد موجود وي داسې چې

$$\Rightarrow x\in(a, a+\delta) \Rightarrow f(x)\in(l_1-\varepsilon, l_1+\varepsilon)$$

او په سمبولیک ډول ليکو چې

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=l_1 \quad \text{يا} \quad \lim_{x\to a^+} f(x)=l_1$$

د کيڼ لور ليمت: $f(x)$ تابع په a عدد کې د کيڼ لور ليمت l_2 لري که چېرې د هر $\varepsilon>0$ لپاره يو $\delta>0$ عدد موجود وي داسې چې:

$$\Rightarrow x\in(a-\delta, a) \Rightarrow f(x)\in(l_2-\varepsilon, l_2+\varepsilon)$$

په ورته توګه ليکي چې

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f\ (x) = l_2 \quad \text{يا} \quad \lim_{x\to a^-} f\ (x) = l_2$$

$f\ (x)$ تابع کله چې $x \to a$ وکړي، l لیمت لري یعنې $\lim_{x\to a} f(x) = l$ مشروط په دې چې

$$\boxed{\lim_{x\to a^-} f\ (x) \ = \ l \ = \ \lim_{x\to a^+} f\ (x)}$$

په دې اساس که چېرې د یوې تابع د ښي او کیڼ لور لیمتونه له یوه بل سره مساوي نه وي، تابع لیمت نلري.

2 مثال: د $f\ (x) = \dfrac{x^2-9}{x-3}$ لپاره وښیئ چې $\lim_{x\to 3} f\ (x) = 6$.

حل : ښي او کیڼ لیمتونه یې مطالعه کوو:

x	3.5	3.1	3.01	3.001	$\to 3^+$
$f\ (x)$	6.5	6.1	6.01	6.001	$\to 6$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3^+} f\ (x) = 6$$

x	2.5	2.9	2.99	2.999	$\to 3^-$ و
$f\ (x)$	5.5	5.9	5.99	5.999	$\to 6$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3^-} f\ (x) = 6$$

لیدل کیږي چې ښي او کیڼ لور لیمتونه یې سره مساوي دي، یعنې

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3^-} f\ (x) \ = \ 6 \ = \ \lim_{x\to 3^-} f\ (x)$$

په دې اساس $\lim_{x\to 3} f\ (x) = \lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3} = 6$

3 مثال: د $\lim_{x\to 2} \frac{|x-2|}{x-2}$ عدد موجودیت ثبوت کړئ.

حل : بیاهم د $g\ (x) = \frac{|x-2|}{x-2}$ تابع کیڼ او ښي لور لیمتونه شمېرو:

x	2.5	2.1	2.01	2.001	$\to 2^+$
$g\ (x)$	1	1	1	1	$\to 1$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2^+} g\ (x) = 1$$

په همدې توګه

x	1.5	1.9	1.99	1.99	$\to 2^-$
$g\ (x)$	-1	-1	-1	-1	$\to -1$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2^-} g\ (x) = -1$$

ليدل کيږي چې $\lim_{x\to 3^+} g(x)=1 \neq \lim_{x\to 3^-} g(x)=-1$ ، په دې اساس $\lim_{x\to 2} g(x)$ موجود نه دی.

4 مثال: $f(x)=\sqrt{x-1}$ تابع په پام کې ونیسئ $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ او $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ یې وټاکئ.

حل : که چېرې $x\to 1^+$ وي، $x-1$ افاده هغه مثبت عدد دی چې صفر ته تقرب کوي او جذر یې په هر حالت کې موجود دی، په دې اساس

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\sqrt{x-1}=0$$

خو که چېرې $x\to 1^-$ ته تقرب وکړي، $x-1$ افاده هغه منفي عدد دی چې صفر ته لنډیږي نو $\sqrt{x-1}$ د $x<1$ اعدادو لپاره د تعریف وړ نه ده، په دې اساس $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ موجود نه دی.

5 مثال: د ε او δ مفاهیمو په کارولو سره وښیئ چې $\lim_{x\to 3}(4x+8)=20$ دی.

حل: د $\varepsilon>0$ ټاکلي عدد لپاره قبلوو چې $|(4x+8)-20|<\varepsilon$ وي، $\delta>0$ عدد ټاکو:

$$|(4x+8)-20|<\varepsilon \Rightarrow |4x-12|<\varepsilon \Rightarrow 4|x-3|<\varepsilon \Rightarrow |x-3|<\tfrac{\varepsilon}{4}$$

په دې اساس د $\delta=\frac{\varepsilon}{4}$ لپاره لرو چې

$$|x-3|<\delta \Rightarrow |x-3|<\tfrac{\varepsilon}{4} \Rightarrow 4|x-3|<\varepsilon \Rightarrow |4x-12|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow |4x+8-8-12|<\varepsilon \Rightarrow |(4x+8)-20|<\varepsilon \Rightarrow \lim_{x\to 3}(4x+8)=20$$

بینهایت د تابع لیمت په توګه: ویل کیږي چې $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$ دی، که چېرې وکولی شو $f(x)$ د هر ستر عدد څخه هم ستر په پام کې ونیسو، داسې حال کې چې x په خپله خوښه a عدد ته لنډ شي.

په همدې توګه ویلی شو چې $\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$ دی، که چېرې وکولی شو $f(x)$ د هر منفي عدد څخه هم وړوکی په پام کې ونیسو، داسې حال کې چې x په خپله خوښه a عدد ته لنډ شي.

په پاسینیو حالاتو کې نشو کولی ووایو چې f په $x=a$ کې لیمت لري، ځکه چې $+\infty$ او $-\infty$ ته عدد نشو ویلی. بینهایت د لیمت په توګه هغه مهال مطرح کیږي چې د تابع ګراف $x=a$ عمودي مجانب ولري.

6 مثال: $f(x)=\frac{1}{(x-2)^2}$ تابع په پام کې نیسو، د دې تابع ځینې مقدارونه په لاندې جدول کې شمېرل شوي.

x	3	2.5	2.1	2.01	2.001
$f(x)$	1	4	100	10000	100000

لیدل کیږي؛ هر څومره چې x له ښي لوري څخه 2 ته لنډیږي، د $f(x)$ قیمت لوړیږي.

که په دې اساس $f\ (x)$ کولی شو بې شمېر لوړ کړو ، مشروط په دې چې x له ښي لوري څخه بې شمېره 2 ته لنډ شي. نو لیکو چې

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{(x-2)^2}=+\infty$$

په همدې توګه لاندې جدول په پام کې نیسو:

x	1	1.5	1.9	1.99	1.999
$f\ (x)$	1	4	100	10000	100000

لیدل کیږي؛ هر څومره چې x له کېڼ لوري څخه 2 ته لنډیږي د $f\ (x)$ قیمت لوړیږي.

په دې اساس کولی شو $f\ (x)$ بې شمېره لوړه کړو ، مشروط په دې چې x له کېڼ لوري څخه په بې شمېره توګه 2 ته لنډ شي ، په دې اساس لیکو

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{(x-2)^2}=\infty$$

د پاسینیو دوو حالاتو څخه پایله ترلاسه کیږي چې:

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^2}=+\infty$$

او د پاسیني اړیکې تعبیر د لیمت نه شتون په معنی دی.

7 **مثال:** د $f\ (x)=\frac{1}{x}$ تابع لیمت داسې حال کې چې $x\to 0^+$ ته تقرب وکړي، وشمېرئ.

حل: لاندې جدول په پام کې نیسو:

x	1	0.1	0.01	0.001	0.0001
$f\ (x)$	1	10	100	1000	10000

ښکاره ده چې:

$$\lim_{x\to 0^+}f\ (x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\infty$$

په همدې توګه کولی شو وښیو چې $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$ دی.

په بینهایت کې لیمت: وایي که چېرې $x>N$ وي، $\lim_{x\to\infty}f\ (x)=l$ دی په هغه صورت کې چې د هر مثبت ε عدد لپاره N مثبت عدد موجود وي، داسې چې له $|x|>N$ غیر مساوات څخه $|f\ (x)-l|<\varepsilon$ غیر مساوات ترلاسه شي، یعنې

$$\lim_{x\to\infty}f\ (x)=l\Leftrightarrow\left(\forall\varepsilon>0\,,\exists N>0:|x|>N\Rightarrow|f\ (x)-l|<\varepsilon\right)$$

پاسینی تعریف لاندې دوه حالتونه لري:

لومړی. که $x > N$ وي ، $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$ دی.

دویم . که چېرې $x < -N$ وي، نو $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$ دی.

په بینهایت کې لیمت نه یوازې د عادي توابعو لپاره بلکې د عددي ترادفونو(هغه توابعو لپاره چې د تعریف ناحیه یې د طبیعي اعدادو سیټ وي) هم مطرح کیږي.

8 مثال: د $f(x) = \frac{1}{x}$ تابع لیمت داسې حال کې چې $x \to \infty$ وکړي، وشمېرئ.

حل: لاندې جدول په پام کې نیسو:

x	1	10	100	1000	10000
$f(x)$	1	0.1	0.01	0.001	0.0001

ښکاره ده چې:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

په همدې توګه کولی شو وښیو چې $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ دی.

9 مثال: د $f(x) = \frac{x}{|x|}$ تابع لیمت داسې حال کې چې $x \to -\infty$ ته تقرب وکړي، وشمېرئ.

حل: لاندې جدول په پام کې نیسو

x	-1	-10	-100	-1000	-10000
$f(x)$	-1	-1	-1	-1	-1

ښکاره ده چې $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{|x|} = -1$

په همدې توګه کولی شو وښیو چې $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{|x|} = 1$ دی.

یادونه:

1. که چېرې $\lim_{x\to a} u(x) = \infty$ یا $\lim_{x\to a} u(x) = -\infty$ وي په دې صورت کې $\lim_{x\to a} \frac{1}{u(x)} = 0$ کیږي.
2. که $\lim_{x\to a} u(x) = 0$ وي، نو $\lim_{x\to a} \frac{1}{u(x)} = \infty$ او یا $\lim_{x\to a} \frac{1}{u(x)} = -\infty$ دی.

9.2 د لیمت ځانګړتیاوې

د ثابت تابع لیمت: که چېرې a او c دوه ثابت اعداد وي، د $f(x) = c$ ثابت تابع لپاره ښکاره ده چې $\lim_{x\to a} f(x) = c$ کیږي.

د خطي تابع لیمت: که a ، b او $m \neq 0$ ثابت اعداد وي، د $f(x) = mx + b$ خطي تابع لپاره $\varepsilon > 0$ عدد په پام کې نیسو او لرو چې

$$|f(x)-(ma+b)|<\varepsilon \Rightarrow |(mx+b)-(ma+b)|<\varepsilon$$
$$\Rightarrow |mx-ma|<\varepsilon \Rightarrow m|x-a|<\varepsilon \Rightarrow |x-a|<\tfrac{\varepsilon}{m}$$

په دې اساس د هر $\varepsilon>0$ لپاره $\delta=\frac{\varepsilon}{m}$ عدد موجود دی داسې چې:

$$|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-(ma+b)|<\varepsilon$$

په دې اساس

$$\lim_{x\to a} f(x)=ma+b$$

په پایله کې کولی شو وليکو چې:

$$\boxed{\lim_{x\to a} c=c \quad , \quad \lim_{x\to a}(mx+b)=ma+b}$$

د لیمت بنسټیز قواعد: که چېرې $\lim_{x\to a} f(x)$ او $\lim_{x\to a} g(x)$ موجود وي، نو

$$\boxed{\begin{aligned}
&I.\quad \lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)\\
&II.\quad \lim_{x\to a}[f(x)g(x)]=\left[\lim_{x\to a} f(x)\right]\left[\lim_{x\to a} g(x)\right]\\
&III.\quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} \quad , \quad \lim_{x\to a} g(x)\neq 0\\
&IV.\quad \lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}
\end{aligned}}$$

له ثابت عدد سره د تابع ضرب حاصل لیمت: که چېرې $f(x)$ تابع او c ثابت عدد د ضرب په حال کې وي نو د لیمت لپاره يې لرو چې:

$$\lim_{x\to a}[cf(x)]=\left[\lim_{x\to a} c\right]\left[\lim_{x\to a} f(x)\right]=c\lim_{x\to a} f(x)$$

د توابعو تفاضل لیمت: که $\lim_{x\to a} f(x)$ او $\lim_{x\to a} g(x)$ موجود وي، د توابعو د مجموع لیمت په کارولو سره کولی شو وليکو:

$$\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)]=\lim_{x\to a}[f(x)+(-1)g(x)]$$
$$=\lim_{x\to a} f(x)+\left[(-1)\lim_{x\to a} g(x)\right]=\lim_{x\to a} f(x)+\left[\lim_{x\to a}(-1)\right]\left[\lim_{x\to a} g(x)\right]$$
$$=\lim_{x\to a} f(x)+(-1)\left[\lim_{x\to a} g(x)\right]=\lim_{x\to a} f(x)-\lim_{x\to a} g(x)$$

په دې اساس

$$\boxed{\begin{aligned}
&4.\quad \lim_{x\to a}[cf(x)]=c\lim_{x\to a} f(x)\\
&5.\quad \lim_{x\to a}[f(x)-g(x)]=\lim_{x\to a} f(x)-\lim_{x\to a} g(x)
\end{aligned}}$$

د عينيت تابع ليمت: د a ثابت عدد، $f(x)=x$ عينيت تابع او د خطي تابع ليمت لپاره کولی شو وليکو:

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} x=\lim_{x\to a}(1\cdot x+0)=1\cdot a+0=a$$

نو

$$\boxed{\lim_{x\to a} x=a}$$

د توابع جمع حاصل ليمت تعميم. f_1 ، f_2 ، f_3 ، ⋯ و f_n توابع په لرلو سره ليکو چې

$$\boxed{\begin{aligned}&\lim_{x\to a}\left[f_1(x)+f_2(x)+f_2(x)+f_3(x)+\cdots+f_n(x)\right]\\&=\lim_{x\to a} f_1(x)+\lim_{x\to a} f_2(x)+\lim_{x\to a} f_2(x)+\lim_{x\to a} f_3(x)+\cdots+\lim_{x\to a} f_n(x)\end{aligned}}$$

د توابعو د حاصل ضرب ليمت تعميمي حالت (د طاقت تابع ليمت): که چېرې a ثابت عدد، n طبيعي عدد او $f(x)$ د $\lim_{x\to a} f(x)$ درلودونکې تابع وي، په دې صورت کې، د توابعو د حاصل ضرب ليمت په پام کې نيولو څخه لرو چې:

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^n=\lim_{x\to a}\left[\underbrace{f(x)\cdot f(x)\cdot f(x)\cdots f(x)}_{n}\right]$$

$$=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} f(x)\cdots\lim_{x\to a} f(x)=\left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n$$

يعنې

$$\boxed{\lim_{x\to a}[f(x)]^n=\left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n}$$

او که m او n طبيعي اعداد وي، نو

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{\frac{m}{n}}=\lim_{x\to a}\sqrt[n]{[f(x)]^m}=\sqrt[n]{\lim_{x\to a}[f(x)]^m}=\sqrt[n]{\left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^m}$$

په دې اساس

$$\boxed{\lim_{x\to a}[f(x)]^{\frac{m}{n}}=\left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^{\frac{m}{n}}}$$

د پولينومي توابعو ليمت: د طاقت تابع ليمت په پام کې نيول سره کولی شو وليکو چې

$$\lim_{x\to a} x^n=\lim_{x\to a}\left(\underbrace{xxx\cdots x}_{n}\right)=\left(\lim_{x\to a} x\right)\left(\lim_{x\to a} x\right)\left(\lim_{x\to a} x\right)\cdots\left(\lim_{x\to a} x\right)=aaa\cdots a=a^n$$

اوس کولی شو د هر پولينوم ليمت وشمېرو:

$$\lim_{x\to a}\left[c_0x^n+c_1x^{n-1}+c_2x^{n-2}+\cdots+c_n\right]=c_0a^n+c_1a^{n-1}+c_2a^{n-2}+\cdots+c_n$$

په دې اساس د $P(x)$ پولينوم لپاره لرو چې:

$$\boxed{\lim_{x\to a} P(x)=P(a)}$$

د ناطق توابعو ليمت: که چېرې $P(x)$ او $Q(x)$ پولينومونه وي، داسې چې $Q(a)\neq 0$ وي، نو

$$\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{\lim_{x\to a}P(x)}{\lim_{x\to a}Q(x)}=\frac{P(a)}{Q(a)}$$

په دې اساس

$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(a)}{Q(a)}}$$

په دې اساس د پولينومي او ناطق توابعو ليمت د دې توابعو د قيمتونو سره په اړوند عدد کې مساوي کيږي.

مثالونه

1. $\lim_{x\to a}\left(cx^4+dx^5\right)=\lim_{x\to a}\left(cx^4\right)+\lim_{x\to a}\left(dx^5\right)=ca^4+da^5$
2. $\lim_{x\to a}\frac{8x^2-5x+3}{4x^3+7x+6}=\frac{\lim_{x\to a}\left(8x^2-5x+3\right)}{\lim_{x\to a}\left(4x^3+7x+6\right)}=\frac{8a^2-5a+3}{4a^3+7a+6}$
3. $\lim_{x\to 2}\frac{5x+6}{3x+2}=\frac{\lim_{x\to 2}(5x+6)}{\lim_{x\to 2}(3x+2)}=\frac{5\cdot 2+6}{3\cdot 2+2}=\frac{16}{8}=2$
4. $\lim_{x\to 3}\frac{x-2}{x+2}=\frac{\lim_{x\to 3}(x-2)}{\lim_{x\to 3}(x+2)}=\frac{3-2}{3+2}=\frac{1}{5}$
5. $\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{x+4}=\frac{\lim_{x\to 4}(x-4)}{\lim_{x\to 4}(x+4)}=\frac{4-4}{4+4}=\frac{0}{8}=0$
6. $\lim_{x\to 4}\sqrt{25-x^2}=\sqrt{\lim_{x\to 4}\left(25-x^2\right)}=\sqrt{25-4^2}=\sqrt{25-16}=\sqrt{9}=3$

يادونه: په هغه حالت کې چې $\lim_{x\to a}f(x)=\infty$ او $\lim_{x\to a}g(x)=\infty$ وي، ممکن د ليمت الجبري ځانګړتياوې صدق ونه کړي، لاندې مثالونو ته پام وکړئ.

7. $\lim_{x\to 1}\frac{x}{1-x}=\infty$, $\lim_{x\to 1}\frac{1}{1-x^2}=\infty\Rightarrow\lim_{x\to 1}\frac{\frac{x}{1-x}}{\frac{1}{1-x^2}}=\lim_{x\to 1}[x(1+x)]=2$
8. $\lim_{x\to\infty}\left(x^2+5\right)=\infty$, $\lim_{x\to\infty}\left(2-x^2\right)=-\infty\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\left[\left(x^2+5\right)+\left(2-x^2\right)\right]=7$

په بينهايت کې د پولينوم ليمت: د يوه پولينوم ليمت کله چې x متحول $+\infty$ يا $-\infty$ ته تقرب کوي، $+\infty$ يا $-\infty$ کيږي، چې منفي يا مثبت اشاره يې د پولينوم د اړوند حد څخه نشآت کوي چې ترټولو لوړ توان لري، لاندې مثال ته پام وکړئ.

9 **مثال:**

$$i.\ \lim_{x\to\infty}\left(2x^4-8x^3-3x^2+1\right)=\lim_{x\to\infty}\left[x^4\left(2-\frac{8}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)\right]$$

$$=\left(\lim_{x\to\infty}x^4\right)\lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{8}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)=\left(\lim_{x\to\infty}x^4\right)\times 2=\infty\times 2=\infty$$

$$ii.\ \lim_{x\to\infty}\left(11-89x+9x^2-x^3\right)\approx\lim_{x\to\infty}\left(-x^3\right)=-\infty$$

د ساندوويچ قضيه (د ليمتونو ترتيب)

(1). فرض کړئ $f(x)$ او $g(x)$ داسې توابع وي چې $f(x)<g(x)$ وي، د ليمتونو په موجوديت کې لرو چې $\lim_{x\to a}f(x)\le\lim_{x\to a}g(x)$، يعنې

$$f(x)<g(x)\Rightarrow\lim_{x\to a}f(x)\le\lim_{x\to a}g(x)$$

(2). که چېرې $f(x)$، $g(x)$ او $h(x)$ توابع د يوه خلاص انتروال څخه چې a عدد پکې شامل دی که د هر x لپاره(ولو $x\neq a$ لپاره)، $f(x)\le g(x)\le h(x)$ شرط صدق وکړي، په هغه صورت کې چې $\lim_{x\to a}f(x)=l=\lim_{x\to a}h(x)$ وي، نو $\lim_{x\to a}g(x)=l$ ده. يعنې

$$\left.\begin{matrix}f(x)\le g(x)\le h(x)\\ \lim_{x\to a}f(x)=l=\lim_{x\to a}h(x)\end{matrix}\right\}\Rightarrow\lim_{x\to a}g(x)=l$$

10 **مثال:** $f(x)=\frac{15x-4}{5x+6}$ او $g(x)=\frac{15x+4}{5x-6}$ توابع په پام کې نيسو ښکاره ده چې د $x>1$ لپاره، $f(x)<g(x)$ دی، خو

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{15x-4}{5x+6}=\lim_{x\to\infty}\frac{15-\frac{4}{x}}{5+\frac{6}{x}}=\frac{15}{5}=3$$

$$\lim_{x\to\infty}g(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{15x+4}{5x-6}=\lim_{x\to\infty}\frac{15+\frac{4}{x}}{5-\frac{6}{x}}=\frac{15}{5}=3$$

ليدل کيږي چې $f(x)<g(x)$ به وي، خو $\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}g(x)$ دی.

11 **مثال:** که $u(x)$ تابع، $1-\frac{x^2}{4}\le u(x)\le 1+\frac{x^2}{4}$ ځانګړنه ولري، $\lim_{x\to 0}u(x)$ پيدا کئ.

حل. ښکاره ليدل کيږي چې:

$$\lim_{x\to 0}(1-\tfrac{x^2}{4})=1=\lim_{x\to 0}(1+\tfrac{x^2}{4})$$

د پاسيني قضيې په اساس $\lim_{x\to 0}u(x)=1$ دی.

9.3 د ليمت مبهم حالتونه

د توابعو د مجموع، ضرب حاصل او نسبت ليمت شمېرلو په ترڅ کې ځينې مهال ليمت $\infty-\infty$ ، $0\cdot\infty$ ، $\frac{0}{0}$ او $\frac{\infty}{\infty}$ حالت غوره کوي، دلته يې ببلګې مطالعه کوو.

لومړی $\boxed{\frac{0}{0}}$ حالت: که د $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ تابع د ليمت نيولو پرمهال صورت او مخرج په يوه وخت کې د $x=a$ لپاره صفر شي، يعنې $f(a)=0=g(a)$ په دې صورت کې يادليمت $\frac{0}{0}$ حالت غوره کوي، چې صورت او مخرج د $x-a$ ګڼ فکتور درلودونکی وي، چې ځينې مهال حتی مضاعف او يا څو ځلي وي، د دې فکتور په اختصارولو سره مبهم والی له منځه ځي او ليمت شمېرل کيږي.

1. $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}(x+3)=3+3=6$

2. $\lim\limits_{x\to4}\frac{x-4}{x^2-x-12}=\lim\limits_{x\to4}\frac{x-4}{(x+3)(x-4)}=\lim\limits_{x\to4}\frac{1}{x+3}=\frac{1}{4+3}=\frac{1}{7}$

3. $\lim\limits_{h\to0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{2xh+h^2}{h}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{h(2x+h)}{h}=\lim_{h\to0}(2x+h)=2x$$

4. $\lim\limits_{x\to2}\frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}=\lim\limits_{x\to2}\frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{\left(3-\sqrt{x^2+5}\right)(3+\sqrt{x^2+5})}=\lim\limits_{x\to2}\frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{9-(x^2+5)}$

$$=\lim_{x\to2}\frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{(4-x^2)}=\lim_{x\to2}\left(3+\sqrt{x^2+5}\right)=3+\sqrt{2^2+5}=6$$

5. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x+1}{x-1}=\infty$

6 **مثال:** $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt[5]{x}-\sqrt[5]{a}}{x-a}$ مقدار وشمېرئ.

حل: دلته $x=y^5$ او $a=b^5$ وضع کوو، نو لرو چې

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[5]{x}-\sqrt[5]{a}}{x-a}=\lim_{y\to b}\frac{y-b}{y^5-b^5}=\lim_{y\to b}\frac{y-b}{(y-b)(y^4+y^3b+y^2b^2+yb^3+b^4)}$$

$$=\lim_{y\to b}\frac{1}{(y^4+y^3b+y^2b^2+yb^3+b^4)}=\frac{1}{5b^4}=\frac{1}{5\sqrt[5]{a^4}}$$

دويم $\boxed{\frac{\infty}{\infty}}$ حالت: که د $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ شمېرلو په ترڅ کې صورت او مخرج د $x=a$ لپاره په يوه وخت کې ∞ ته لنډ شي، يعنې $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty=\lim\limits_{x\to a}g(x)$ په دې صورت کې يادليمت $\frac{\infty}{\infty}$ حالت

غوره کوي. په دې حالت کې $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}}$ په $\frac{0}{0}$ توګه اړول کیږي، که څه هم د دې دستورد تطبیق په صورت کې کولی شو مبهم والی رفع کړو، خو ممکن ځینې مهال دا مساله آسانه حل شي. که $\frac{\infty}{\infty}$ حالت د دوو تابع ګانو یا پولینومونو په نسبت کې راڅرګند شي، د کسر صورت او مخرج په یوه وخت کې د متحول په ترټولو لوړ توان تقسیم کوو، په دې توګه مبهم والی لرې کیږي.

په بینهایت کې د ناطق تابع لیمت: که چېرې $P_m(x)$ پولینوم درجه m او $P_n(x)$ درجه n وي په دې حالت کې د $\lim_{x\to\infty}\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ ترلاسه کولو په موخه د کسر صورت او مخرج په x^{α} داسې چې $\alpha=\max(m,n)$ وي، تقسیموو، او ترلاسه کوو چې:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_m(x)}{P_n(x)}=\begin{cases} c & , \quad m=n \\ \pm\infty & , \quad m>n \\ 0 & , \quad m<n \end{cases}$$

د $m=n$ په صورت کې c عدد د صورت او مخرج د هغه حدونو ضریبونو نسبت دی چې تر ټولو لوړ توان ولري. ورته حالت د ځینې نمایي توابعو لپاره هم د تطبیق وړ دی(12 مثال).

مثالونه.

6. $\lim_{x\to\infty}\frac{3x-2}{9x+7}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x-2}{x}}{\frac{9x+7}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{2}{x}}{9+\frac{7}{x}}=\frac{\lim_{x\to\infty}\left(3-\frac{2}{x}\right)}{\lim_{x\to\infty}\left(9+\frac{7}{x}\right)}=\frac{3-0}{9+0}=\frac{1}{3}$

7. $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x+3}{x^2-8x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}{1-\frac{8}{x}+\frac{5}{x^2}}=\frac{\lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}{\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{8}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}=\frac{2}{1}=2$

8. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2}{4x^2+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+\frac{2}{x^2}}{4+\frac{1}{x}}=\frac{\lim_{x\to\infty}\left(x+\frac{2}{x^2}\right)}{\lim_{x\to\infty}\left(4+\frac{1}{x}\right)}=\frac{\infty+0}{4+0}=\frac{\infty}{4}=\infty$

9. $\lim_{x\to\infty}\frac{9x^2-x+5}{\sqrt{9x^4+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{9x^2-x+5}{x^2}}{\frac{\sqrt{9x^4+1}}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{9-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}{\sqrt{9+\frac{1}{x^4}}}=\frac{9}{\sqrt{9}}=3$

10. $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-8x^2+5}{4x^5+x^4-6x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{8}{x}+\frac{5}{x^3}}{4x^2+x-\frac{6}{x^2}}=\frac{\lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{8}{x}+\frac{5}{x^3}\right)}{\lim_{x\to\infty}\left(4x^2+x-\frac{6}{x^2}\right)}=0$

11. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}1+\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}=1+0=1$

12. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6\times 2^{5x}-3\times 2^{x}-8}{3\times 2^{5x}-2^{x}+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^{5x}\left(6-\dfrac{3}{2^{4x}}-\dfrac{8}{2^{5x}}\right)}{2^{5x}\left(3-\dfrac{1}{2^{4x}}+\dfrac{1}{2^{5x}}\right)}=\dfrac{6}{3}=2$

13. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{3n^{2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{n(n-1)}{2}}{3n^{2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n-1)}{6n^{2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-1}{6n}=\dfrac{1}{6}$

دريم. $\boxed{0\times\infty}$ حالت: ممکن د $\lim\limits_{x\to a}[f(x)g(x)]$ شمېرلو پرمهال $0\times\infty$ حالت غوره کړي، په دې صورت کې $f(x)g(x)=\dfrac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ ، $\frac{0}{0}$ حالت غوره کوي.

14 مثال:

$$i.\ \lim_{x\to 5}\left[(x^{2}-25)\times\frac{1}{x-5}\right]\overset{0\times\infty}{=}\lim_{x\to 5}\frac{x^{2}-25}{x-5}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(x+5)}{x-5}=10$$

$$ii.\ \lim_{x\to-\infty}\left(x^{2}\cdot\frac{1}{x\sqrt{x^{2}-1}}\right)\overset{\infty\times 0}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{x^{2}}{x\sqrt{x^{2}-1}}\overset{\frac{\infty}{-\infty}}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^{2}-1}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^{2}}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{|x|}\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^{2}}}}=(-1)1=-1$$

څلورم. $\boxed{\infty-\infty}$ حالت: که د $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-g(x)]$ لیمت شمېرل $\infty-\infty$ شکل غوره کړي، په دې صورت کې $f(x)-g(x)=f(x)\left(1-\frac{g(x)}{f(x)}\right)$ په $\frac{\infty}{\infty}$ او یا $0\times\infty$ حالتونو اوړوي. که چېرې دغه حالت د دوو کسرونو تفاضل او یا د جذر لرونکو افادو په تفاضل کې رامنځته شي، له یوه بل څخه د کسرونو له تفریق کولو او یا جذر لرونکو افادو او اړونده مزدوجونو په ضرب او تقسیمولو سره یې کولی شو مبهم والی رفع کړو.

مثالونه.

15. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\overset{\infty-\infty}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=0$

16. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1-x^{2}}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+x-1}{1-x^{2}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{1-x^{2}}=\infty$

17. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^{5}-8x^{3}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left[x^{5}\left(1-\dfrac{1}{x^{3}}\right)\right]=\infty\times 1=\infty$

9.4 د مثلثاتي توابعو ليمت

د مثلثاتي توابعو د ليمت شمېرلو پرمهال ممکن، مبهم حالات موجود وي چې تر ټولو مهم شکل يې $\frac{0}{0}$ دی او دغه حالت کولی شو د يوه عمده فکتور په ټاکلو سره چې د $\sin x$ او x زاويې نسبت دی رفع کړو، خو مخکې له هغه لاندې بېلګې تجربه کوو:

مثالونه

1. $\lim_{x\to 0}\sin x = \sin 0 = 0$, 2. $\lim_{x\to 0}\cos x = \cos 0 = 1$

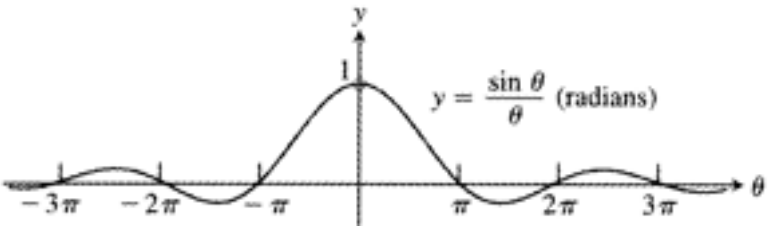
3. $$\lim_{x\to 0}\tan x = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\lim_{x\to 0}\sin x}{\lim_{x\to 0}\cos x} = \frac{0}{1} = 0$$

6. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\sin x = \sin\frac{\pi}{2} = 1$, 7. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\cos x = \cos\frac{\pi}{2} = 0$

4. $$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\tan x = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\cos x} = \infty$$

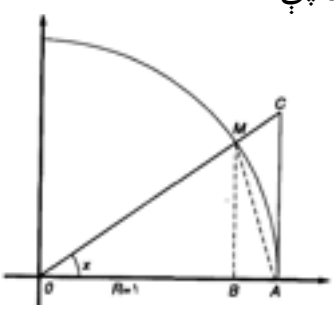
اساسي قضيه: کله چې x زاويه صفر لور ته تقرب وکړي، د $\sin x$ او x نسبت 1 ته تقرب کوي(9.2 شکل)، يعنې

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1}$$



9.2 شکل

ثبوت: x زاويه داسې چې $0 < x < \frac{\pi}{2}$ وي، د r شعاع لرونکې دايرې مرکزي زاويې په توګه په پام کې نيسو (9.3 شکل)، د دوو OAM او OAC مثلثونو او د يادې دايرې د OAM قطاع د مساحتونو له پرتله کولو څخه لرو چې:



9.3 شکل

د مثلث مساحت OAM < د قطاع مساحت OAM < د OAM مثلث مساحت

هر یو پاسینی مساحت په بېل، بېل ډول شمېرو:

$$\text{د مثلث OAM مساحت} = \frac{1}{2}\overline{OA} \times \overline{BM} = \frac{1}{2} r \times \overline{BM}$$

$$\text{د قطاع OAM مساحت} = \frac{1}{2} x \times r^2$$

$$\text{د مثلث OAC مساحت} = \frac{1}{2}\overline{OA}.\overline{AC} = \frac{1}{2} r \overline{AC}$$

په دې توګه د مخکینې مضاعف مساوي والې لاندې شکل غوره کړ:

$$\frac{1}{2} r \times \overline{BM} < \frac{1}{2} x \times r^2 < \frac{1}{2} r \times \overline{AC}$$

د وروستۍ غیر مساوات دواړه خواوې په $\frac{2}{r^2}$ ضربوو او ترلاسه کېږي، چې

$$\frac{\overline{BM}}{r} < x < \frac{\overline{AC}}{r} \implies \sin x < x < \tan x$$

له شکل څخه ښکاري چې $\frac{\overline{BM}}{r} = \sin x$ او $\frac{\overline{AC}}{r} = \tan x$ دي، په دې اساس

$$\sin x < x < \tan x \implies \frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\tan x}{\sin x}$$

$$\implies 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \implies \frac{1}{1} > \frac{1}{\frac{x}{\sin x}} > \frac{1}{\frac{1}{\cos x}} \implies \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

له دې ځایه لرو چې: $\lim_{x \to 0} \cos x \le \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \le \lim_{x \to 0} 1$

له دې چې $\lim_{x \to 0} \cos x = \lim_{x \to 0} 1 = 1$ دی، د منځنۍ قضیې په اساس ترلاسه کوو چې:

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

مثالونه

1. $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x} = \left(\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \right) \left(\lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} \right) = 1 \cdot 1 = 1$

2. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\alpha x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\alpha \sin(\alpha x)}{\alpha x} = \alpha \lim_{x \to 0} \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha x} = \alpha \cdot 1 = \alpha$

3. $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x}{x}}{\frac{\sin x}{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{1} = 1$

4. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\alpha x)}{\sin(\beta x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha\dfrac{\sin(\alpha x)}{\alpha x}}{\beta\dfrac{\sin(\beta x)}{\beta x}}=\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\alpha x)}{\alpha x}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\beta x)}{\beta x}}=\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{1}{1}=\frac{\alpha}{\beta}$$

5. $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}\right)=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

9.5 د نمائي او لوګارتمي توابعو ليمت

د لوګارتمي او نمائي توابع د ليمت شمېرلو په ترڅ کې هم ممکن مبهم حالات موجود وي، په ټېره بيا 1^{∞} حالت؛ په داسې توابعو کې ډېر ليدل کيږي. د نمائي توابعو د ليمت په شمېرلو او د 1^{∞} مبهم حالت په رفع کولو کې لاندې قضيه محراقي ماهيت لري.

اساسي قضيه: کـه چېـرې n بينهايـت خـوا تـه تقـرب وکـړي، $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ تـرادف، $e=2.7182818284\cdots$ عدد ته تقرب کوي، يعنې

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e}$$

ثبوت: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ بينوم ته انکشاف ورکوو

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}\left(\frac{1}{n}\right)+\binom{n}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\binom{n}{3}\left(\frac{1}{n}\right)^3+\cdots+\binom{n}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

له دې ځايه ترلاسه کيږي چې:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{n}{1!}\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{1}{n}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{n-1}{n}+\frac{1}{3!}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}+\frac{1}{4!}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-3}{n}+\cdots+\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

د وروستۍ اړيکې د دواړو خواوو ترادفونو ليمت په پام کې نيسو:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{n-1}{n}+\frac{1}{3!}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}+\frac{1}{4!}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-3}{n}+\cdots+\left(\frac{1}{n}\right)^n\right]$$

په دې اساس

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\cdots$$

د وروستۍ اړيکې ښې لورۍ د بينهايت مثبت اعدادو (يوې عددي سلسلې) له مجموع څخه جوړ شوی. هر څومره چې د لړۍ له ښې لور څخه ډېر شمېر عناصر وټاکل شي، له مجموع څخه ترلاسه شوی عدد، د ليمت تقريبي قيمت په توګه نسبتا دقيق ترلاسه کيږي، د ساري په توګه که د دې لړۍ شپږ حدونه وټاکل شي:

$$e = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!} = 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120} = 2.711\,665$$

e مطلوب عدد له اعشارۍ وروسته تر دوو رقمونو پورې په دقيق ډول شمېرل کيږي، نو

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\cdots = 2.718\ 281\ 828\ 5\cdots \quad \bullet$$

يادونه: که چېرې يوه دقيق ثبوت ته له مراجعې پرته، د $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ترادف قيمتونه په يوه جدول کې په تدريجي توګه فهرست شي، لرو چې:

n	$\frac{1}{n}$	$1+\frac{1}{n}$	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	1	2	2
2	0.5	1.5	2.25
5	0.2	1.2	2.48832
10	0.1	1.1	2.59374246
100	0.01	1.01	2.704813829
1,000	0.001	1.001	2.716923932
10,000	0.0001	1.0001	2.718145926
100,000	0.00001	1.00001	2.718268237
1,000,000	0.000001	1.000001	2.718280469
1,000,000,000	10^{-9}	$1+10^{-9}$	2.718281828

په دې اساس $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2.718\ 281\ 828\cdots$ دی، e عدد د اويلر عدد په نامه يادېږي.

پايله: که چېرې x حقيقي عدد بينهايت لور ته تقرب وکړي، $\varepsilon(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ تابع هم e عدد ته تقرب کوي، يعنې

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

د نمايي او لوګارتمي توابعو اساسي ليمتونه

1. $\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$,
2. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{\beta x} = e^{\alpha\beta}$
3. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$,
4. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$

ثبوت

1. $x=\frac{1}{\alpha}\Rightarrow\alpha=\frac{1}{x}\quad\Rightarrow\quad\lim\limits_{\alpha\to0}\left(1+\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$

2. $u=\frac{\alpha}{x}\Rightarrow x=\frac{\alpha}{u}\Rightarrow\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{\beta x}=\lim\limits_{u\to0}\left[\left(1+u\right)^{\frac{1}{u}}\right]^{\alpha\beta}=e^{\alpha\beta}$

3. د طبيعي لوګارتم ځانګړنو په کارولو سره لرو چې:

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to0}\left[\frac{1}{x}\ln\left(1+x\right)\right]=\lim_{x\to0}\left[\ln\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}\right]$$

$$=\ln\left[\lim_{x\to0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}\right]=\ln e=1$$

4. په دې برخه کې $y=e^{\alpha}-1$ تعويض په پام کې نيسو:

$$\Rightarrow\lim_{x\to0}\frac{e^{x}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{y}{\ln\left(1+y\right)}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{\ln\left(1+y\right)}{y}}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\left(1+y\right)}{y}}=\frac{1}{1}=1$$

مثالونه.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2}=e\cdot1^{2}=e\cdot1=e$

2. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x-1}{\ln x}=\left[\begin{array}{l}x=e^{y}\ \Leftrightarrow\ y=\ln x\\ x\to1\Leftrightarrow y\to\ln1=0\end{array}\right]=\lim\limits_{y\to0}\frac{e^{y}-1}{y}=1$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1+4}{x-1}\right)^{x-1+3}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x-1}\right)^{x-1+3}$

$$=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{y+3}=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{y}\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{3}=e^{4}\cdot1=e^{4}.$$

د نمايي توابعو ليمت عمومي حالت: په عمومي توګه که $\lim\limits_{x\to a}\left[u\left(x\right)\right]^{v(x)}$ 1^{∞}، 0^{0} يا ∞^{0} مبهم حالتونه ونلري، د لوګارتم او ليمت ځانګړنو په پام کې نيولو سره لرو چې:

$$\lim_{x\to a}\left[u\left(x\right)\right]^{v(x)}=\lim_{x\to a}\left[e^{\ln u(x)}\right]^{v(x)}=\lim_{x\to a}\left[e^{\left[\ln u(x)\right]v(x)}\right]=e^{\lim\limits_{x\to a}\left[\left[\ln u(x)\right]v(x)\right]}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to a}\left[\ln u(x)\right]\lim\limits_{x\to a}v(x)}=e^{\ln\left[\lim\limits_{x\to a}u(x)\right]\lim\limits_{x\to a}v(x)}=\left[\lim_{x\to a}u\left(x\right)\right]^{\lim\limits_{x\to a}v(x)}$$

په دې اساس

$$\boxed{\lim_{x\to a}\left[u\left(x\right)\right]^{v(x)}=\left[\lim_{x\to a}u\left(x\right)\right]^{\lim\limits_{x\to a}v(x)}}$$

کـه د $\lim_{x\to a}[u(x)]^{v(x)}$ نمـايي تـابع ليمـت، 1^{∞} مـبهم حالـت غـوره کـړي، پـه دې حالـت کـې د $\alpha = u-1$ تعويض په ترسره کولو سره لرو چې

$$\lim_{x\to a} u^{v} = \lim_{x\to a}\left[(1+u-1)^{\frac{v}{u-1}(u-1)}\right] = \lim_{x\to a}\left[(1+\alpha)^{\frac{v}{\alpha}\alpha}\right] = \left[\lim_{x\to a}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\lim_{x\to a}(v\alpha)}$$

له دې چې $\alpha = u-1$ او $u\to 1$ ، نو ځکه $\alpha\to 0$ ، په پايله کې

$$\lim_{x\to a}[u(x)]^{v(x)} = \left[\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\lim_{x\to a}[v(u-1)]} = e^{\lim_{x\to a}[v(u-1)]}$$

په دې اساس

$$\boxed{\lim_{x\to a}[u(x)]^{v(x)} \overset{1^{\infty}}{=} e^{p} \ , \ p = \lim_{x\to a}[v(u-1)]}$$

بايد ووايو چې پاسيني فورمول يوازې په 1^{∞} مبهم حالت کې د تطبيق وړ تيا لري.

مثالونه

4. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{x}\right)^{\frac{4-x}{x+1}} = \left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}\right)^{\lim_{x\to 0}\frac{4-x}{x+1}} = 3^4 = 81$

5. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{12x^4+x}{1+3x^4}\right)^{\frac{9+x^2}{2x^2-1}} = \left(\lim_{x\to\infty}\frac{12x^4+x}{1+3x^4}\right)^{\lim_{x\to\infty}\frac{9+x^2}{2x^2-1}} = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$

6. $\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left[(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}}\right]$

$$= \left[\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\right]^{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}} = e^1 = e$$

7. $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}} = e^{p} \quad , \quad \left(v=\frac{1}{x}\ ,\ u=\cos x\right)$

$$p = \lim_{x\to 0}[v\,(u-1)] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}(\cos x - 1)\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)(\cos x+1)}{x\,(\cos x+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x - 1}{x\,(\cos x+1)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x - (\cos^2 x + \sin^2 x)}{x\,(\cos x+1)} = -\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x+1} = -1\cdot 0 = 0$$

په دې اساس

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}} = e^{0} = 1$$

يادونه: د بيلابيلو توابعو په ليمت کې $\frac{0}{0}$ ، $\frac{\infty}{\infty}$ ، $0.\infty$ ، $\infty-\infty$ او 1^{∞} مبهم حالات قسما وڅېړل شول، د مشتق کارونې په مبحث کې د هوپيتال قواعدو تر عنوان لاندې پنځه پاسيني او دوه 0^0 او ∞^0 مبهم حالتونه په عمومي او واضيح توګه د مشتق په مرسته تحليل کيږي.

9.6 د توابعو تمادیت (ټرل والی)

$f(x)$ تابع په $x=a$ نقطه کې متمادي ده، که چېرې لاندې درې شرطونه صدق کړي:

لومړی f تابع په $x=a$ کې تعريف شوې وي؛ يعنې $f(a)$ موجوده وي.

دويم f تابع په $x=a$ کې ليمت ولري؛ يعنې $\lim_{x\to a} f(x)$ موجود وي.

دريم په a کې د f تابع ليمت مساوي په $f(a)$ وي؛ يعنې $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

که چېرې تابع د يوه انتروال په هر نقطه کې متمادي وي، تابع په هغه انتروال کې متمادي ګڼل کيږي.

1 **مثال:** آيا $f(x)=x^2+1$ تابع په $x=5$ نقطه کې متمادي ده؟

حل: f تابع په $x=5$ نقطه کې تعريف شوې نو $f(2)=5^2+1=26$ او $\lim_{x\to 5} f(x)=\lim_{x\to 5}(x^2+1)=26$ دي. په دې اساس $\lim_{x\to 5} f(x)=26=f(5)$ نو ځکه f په $x=5$ نقطه کې متمادي ده.

2 **مثال:** وښيئ چې $f(x)=\sin x$ ، $g(x)=\cos x$ تابع په ټولو حقيقي اعدادو کې متمادي ده.

حل: پوهيږو چې دغه دوې تابع د هر $x=a$ حقيقي عدد لپاره تعريف کيږي او اړوند ليمتونه يې هم موجود دي نو سربېره پر دې:

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\sin x=\sin a=f(a)$$

$$\lim_{x\to a} g(x)=\lim_{x\to a}\cos x=\cos a=g(a)$$

په دې اساس يادې توابع د هر حقيقي عدد لپاره متمادي دي.

3 **مثال:** وښيئ چې پولينومي توابع، په ټولو حقيقي اعدادو کې متمادي ده.

حل: پوهيږو چې $P(x)$ اختياري پولينومي تابع، د هر $x=a$ حقيقي عدد لپاره کيږي او په دې عدد کې يې ليمت هم موجود دی، سربېره پر دې:

$$\lim_{x\to a} P(x)=P(a)$$

په دې اساس ياد پولينوم د هر حقيقي عدد لپاره متمادي دی.

4 **مثال:** وښيئ چې هر $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ ، ناطق تابع په ټولو حقيقي اعدادو کې متمادي ده.

حل: پوهيږو چې $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ اختياري ناطق تابع د خپلې تعريف ناحيې څخه هر $x=a$ حقيقي عدد لپاره ليمت لري او سربېره پر دې:

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(a)}{Q(a)}=f(a)$$

په دې اساس ناطق تابع د هر حقيقي عدد لپاره متمادي ده.

د توابعو د تماديت ځانګړنې: که چېرې f او g توابع په a نقطه کې متمادي وي، نو $f+g$ ، $f-g$ ، $f\,g$ او $\frac{f}{g}$ توابع هم مشروط په دې چې $g(a)\neq 0$ وي، متمادي دي.

ثبوت: په آسانۍ ليدل کيږي چې:

$$\lim_{x\to a}(f+g)(x)=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x)=f(a)+g(a)=(f+g)(a)$$

$$\lim_{x\to a}(f-g)(x)=\lim_{x\to a}f(x)-\lim_{x\to a}g(x)=f(a)-g(a)=(f-g)(a)$$

$$\lim_{x\to a}(f\,g)(x)=\lim_{x\to a}f(x)\lim_{x\to a}g(x)=f(a)\,g(a)=(f\,g)(a)$$

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}=\frac{f(a)}{g(a)}=\left(\frac{f}{g}\right)(a)\quad,\quad g(a)\neq 0$$

په دې اساس د غوښتل شوو توابعو متمادي والی څرګند دی.

د مرکب توابعو متمادي والي: که چېرې $\lim_{x\to a}g(x)=b$ او $f(x)$ په $x=b$ کې متمادي وي. نو

$$\boxed{\lim_{x\to a}f(g(x))=f\left(\lim_{x\to a}g(x)\right)=f(b)}$$

او که g په $x=a$ او f په $x=g(a)$ کې متمادي وي، نو $f\circ g$ تابع په $x=a$ هم متمادي ده، يعنې:

$$\lim_{x\to a}f(g(x))=f\left(\lim_{x\to a}g(x)\right)=f(g(a))$$

پايله: د ليمت شمېرنې د تماديت ځانګړنو په پام کې نيولو سره آسانه کيږي، لاندې موارد په پام کې ونيسئ.

1. $\lim_{x\to a}[f(x)]^{\alpha}=\left[\lim_{x\to a}f(x)\right]^{\alpha},\alpha\in\mathbb{R}$,
2. $\lim_{x\to a}[b^{f(x)}]=b^{\lim_{x\to a}f(x)},b>0$
3. $\lim_{x\to a}(\sin f(x))=\sin\left[\lim_{x\to a}f(x)\right]$,
4. $\lim_{x\to a}[\log_b f(x)]=\log_b\left[\lim_{x\to a}f(x)\right]$

مثالونه: د توابعو متمادیت ځينې ځانګړنو په پام کې نيولو سره، لاندې ليمتونه شمېرل کيږي:

5. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{12x^9-5x^3}{4x^9+8}\right)^4=\left(\lim_{x\to\infty}\frac{12x^9-5x^3}{4x^9+8}\right)^4=\left(\frac{12}{4}\right)^4=(3)^4=81$

6. $\lim_{x\to\infty}2^{\frac{6x+4}{3-2x}}=2^{\lim_{x\to\infty}\frac{6x+4}{3-2x}}=2^{\frac{6}{-2}}=2^{-3}=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$

7. $\lim_{x\to\infty}\sin\frac{1-\pi x^3}{5x-6x^3}=\sin\left(\lim_{x\to\infty}\frac{1-\pi x^3}{5x-6x^3}\right)=\sin\left(\frac{-\pi}{-6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$

8. $\lim_{x\to2}\log\frac{2x^3+184}{x^2-2}=\log\frac{\lim_{x\to2}(2x^3+184)}{\lim_{x\to2}(x^2-2)}=\log\frac{2\cdot2^3+184}{2^2-2}=\log100=2$

غیرتمادیت(ېېلتون، جلاوالي).. که چېرې f تابع په $x=a$ کې یو له لاندې شرطونو څخه ولري، ویل کیږي چې f په a کې غیر متمادي ده او a یې د ېیلتون نقطه ده. انفصال په درې ډوله دی.

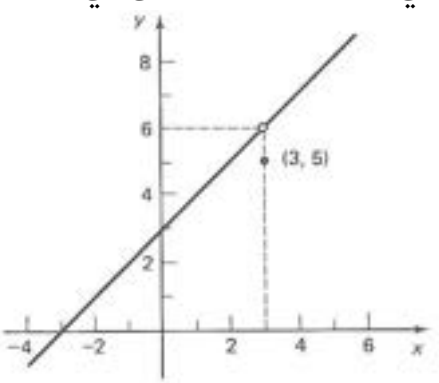
لومړی ډول. f تابع په $x=a$ کې ښې او کیڼ لیمتونه لري، خو دغه لیمتونه له یوه بل سره مساوي نه دي؛ یعنې $\lim_{x\to a}f(x)$ موجود نه دی.

دویم ډول. که چېرې لږ تر لږه یو له دغه دوو لیمتونو څخه موجود نه وي.

دریم ډوله. که چېرې تابع په یوه نقطه کې تعریف ولري، خو په هغه نقطه کې تعریف شوې نه وي(یوازې یوه خالي نقطه وي)، په دې حالت کې ېیلتون د حذف کولو وړ بولي.

9 **مثال:** د $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-9}{x-3} & , x\neq3\\ 5 & , x=3\end{cases}$ تابع متمادیت په $x=3$ کې وڅېړئ.

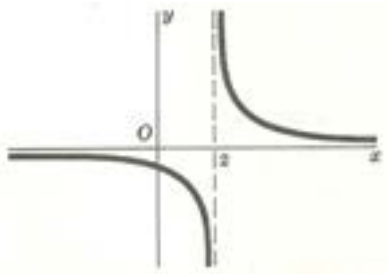
حل: ښکاره ده چې $\lim_{x\to3}f(x)=6$ دی، داسې حال کې چې $f(3)=5$ ، نو $\lim_{x\to3}f(x)\neq f(3)$ او تابع په 3 متمادي نه ده. له شکل څخه لیدل کیږي چې ګراف یوازې په یوه نقطه کې ېیلتون لري، که چېرې $f(3)=6$ تعریف شي، نو ېیلتون له منځه تللی شي(9.4 شکل).



9.4 شکل

10 **مثال:** په $x=2$ کې د $f(x)=\frac{1}{x-2}$ تابع متمادي والی وڅېړئ.

حل: له دې چې تابع په $x=2$ تعریف شوې نه ده، نو $\lim_{x\to2}f(x)$ موجود نه دی او ویلی شو چې تابع په $x=2$ کې متمادي نه ده، په نورو ټولو نقطو کې متمادي ده، د دې تابع ېیلتون نه شي رفع کېدلی(9.5 شکل).



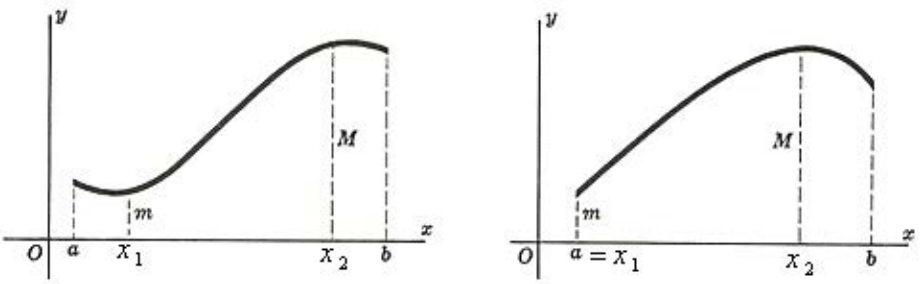
9.5 شکل

د متمادیت ځانګړنې

(1) د یوې تابع ګراف په هغه نقطه کې چې غیر متمادي وي، ټوپ (خپز) یا مات والی پیدا کوي، یعنې د د رسمولو پرمهال چې کله بیلتون نقطې ته رسیږو ؛ قلم د کاغذ له مخې پورته کیږي.

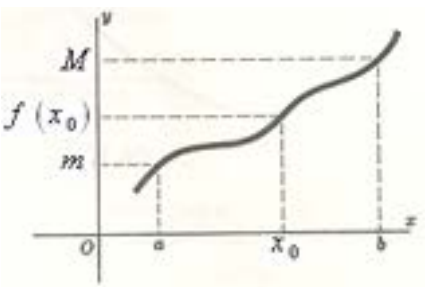
(2) f متمادي تابع په $[a\ ,\ b]$ انټروال کې خپل اعظمي او اصغري په همدې انټروال کې ټاکي(9.6 شکل). یعنې د $[a\ ,\ b]$ انټروال څخه x_1 او x_2 اعداد موجود دي، داسې چې

$$\min_{[a\ ,b]} f\ (x) = f\ (x_1) = m \quad , \quad \min_{[a\ ,b]} f\ (x) = f\ (x_2) = M$$



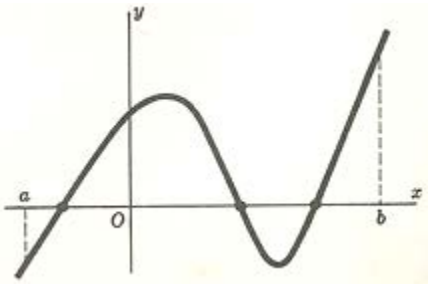
9.6 شکل

(3) f متمادي تابع په $[a\ ,\ b]$ انټروال کې د $[m\ ,\ M]$ انټروال ټول قیمتونه اخلي(9.7 شکل). یعنې له $[m\ ,\ M]$ څخه د هر y_0 لپاره، x_0 عدد له $[a\ ,\ b]$ څخه موجود دی داسې چې $y_0 = f\ (x_0)$ وي، داسې حال کې چې $\min_{[a\ ,b]} f\ (x) = M \quad , \quad \min_{[a\ ,b]} f\ (x) = m$.



9.7 شکل

(4) که چېرې f تابع په $(a\ ,\ b)$ انټروال کې متمادي وي. $f\ (a)$ او $f\ (b)$ مخالفې اشاري ولري، يعنې $f(a)f\ (b)<0$ په دې صورت کې د $y=f\ (x)$ تابع ګراف x محور لږ تر لږه په يوه نقطه کې قطع کوي ، په بل عبارت $f\ (x)=0$ معادله په $(a\ ,\ b)$ انټروال کې حل لري (په دې انټروال کې لږ تر لږه يو جذر لري) (9.8 شکل).



9.8 شکل

11 **مثال:** وښيئ چې $x^2-2^x+3=0$ معادله لږ تر لږه يو جذر په $(5\ ,\ 4)$ انټروال کې لري.

حل : $f\ (x)=x^2-2^x+3$ متمادي تابع په پام کې نيسو ، ليدل کيږي چې:

$$f\ (4)=4^2-2^4+3\ =\ 16-16+3=3$$

$$f\ (5)=5^2-2^5+3=25-32+3=-4$$

له دې چې $f\ (4)$ او $f\ (5)$ مخالف شاري لري، د انټروال په پيل کې د ګراف د پای ټکی د x محور پر مخ او د انټروال په پای کې ټه لاندې يې واقع او ګراف متمادي دی، نو لږ تر لږه افقي محور يو ځل قطع کوي، په بل عبارت له $(5\ ,\ 4)$ انټروال څخه x_0 موجود دی، داسې چې $f\ (x_0)=0$ وي، يعنې $x_0^{\,2}-2^{x_0}+3=0$ ، په دې اساس x_0 د يادې معادلې يو جذر دی.

د ليمت کارونې: د ليمت څخه د ترادفونو، توابعو او لړيو د نهايي قيمتونو په شمېرلو کې ګټه پورته کوي، د توابعو مشتق او انټګرال د ليمت په ذريعه تعريف او شمېرل کيږي.

9.7 د ځيرکي لنډيز

د متحول تقرب: x متحول a ټاکلي عدد ته تقرب کوي، په هغه صورت کې چې x په خپله خوښه a ته لنډ شي.

د ليمت مفهوم: که چېرې $f\ (x)$ تابع په يوه خلاص انټروال کې چې a عدد پکې شامل وي، تعريف شوې وي(ان که په a که تعريف شوې نه وي هم)، a عدد ته د x متحول له تقرب څخه $f\ (x)$ په خپله خوښه l عدد ته لنديږي، ويل کيږي که چېرې x متحول a عدد ته تقرب وکړي د $f\ (x)$ تابع ليمت عبارت دی له l څخه او داسې يې ليکي چې:

$$\lim_{x\to a} f\ (x)=l \quad \text{يا} \quad f\ (x)\to l \Leftrightarrow x\to a$$

د ليمت تعريف:

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon\right)$$

د ليمت ځانګړتياوې

$$i.\quad \lim_{x\to a}\left[f(x) \pm g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$$

$$ii.\quad \lim_{x\to a}\left[f(x)g(x)\right] = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]\left[\lim_{x\to a} g(x)\right]$$

$$iii.\quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}\ ,\ \lim_{x\to a} g(x) \neq 0$$

$$iv.\quad \lim_{x\to a}\left[cf(x)\right] = c\lim_{x\to a} f(x)\ ,\ c \in \mathbb{R}$$

$$v.\quad \lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^{\frac{m}{n}} = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^{\frac{m}{n}}\ ,\ m,n \in \mathbb{N}$$

د پولينومي او ناطق توابعو ليمت

$$i.\quad \lim_{x\to a} P(x) = P(a)\quad ,\quad ii.\quad \lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$$

د ليمتونو ترتيب

$$i.\quad f(x) < g(x) \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x)$$

$$ii.\quad \left.\begin{array}{l} f(x) \leq g(x) \leq h(x) \\ \lim_{x\to a} f(x) = l = \lim_{x\to a} h(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to a} g(x) = l$$

په بينهايت کې د ناطق تابع ليمت

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_m(x)}{P_n(x)} = \begin{cases} c & , \quad m = n \\ \pm\infty & , \quad m > n \\ 0 & , \quad m < n \end{cases}$$

د مثلثاتي توابعو د مبهم ليمت معيار.

$$i.\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1\ ,\quad ii.\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x} = \frac{\alpha}{\beta}\ ,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ ,\ \beta \neq 0$$

$$iii.\quad \lim_{x\to a}\sin x = \sin a\quad ,\quad iv.\ \lim_{x\to a}\cos x = \cos a\ ,\ a \in \mathbb{R}$$

د نمائي توابعو د مبهم ليمت معيار. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = 1$

د نمايي او لوګارتمي توابعو د ليمت مهم حالتونه.

$$i.\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\cdots = e$$

$$ii.\ \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e \quad , \quad iii.\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\tfrac{\alpha}{x}\right)^{\beta x} = e^{\alpha\beta}$$

$$iv.\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad , \quad v.\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$$

$$vi.\ \lim_{x\to a}\left[u(x)\right]^{v(x)} = \left[\lim_{x\to a}u(x)\right]^{\lim_{x\to a}v(x)}$$

$$vii.\ \lim_{x\to a}\left[u(x)\right]^{v(x)} \overset{1^\infty}{=} e^p \ , \ p = \lim_{x\to a}\left[v(u-1)\right]$$

مبهم حالتونه: د ليمتونو په شمېرلو کې اوه $\frac{0}{0}$ ، $\frac{\infty}{\infty}$ ، $0.\infty$ ، $\infty-\infty$ ، 1^∞ ، 0^0 او ∞^0 مبهم حالتونه مطرح کيږي، چې د رفع کولو وړ دي.

د توابعو تمادیت (ټرل والی): $f(x)$ تابع په $x=a$ نقطه کې متمادي ګڼل کيږي که چېرې:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

که چېرې تابع د يوه انتروال په هره نقطه کې متمادي وي، نو په هغه انتروال کې متمادي ګڼل کيږي.

د مرکب توابعو متمادي والی: که چېرې $\lim_{x\to a} g(x) = b$ او $f(x)$ په $x=b$ کې متمادي وي، نو

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right) = f(b)$$

د ځينو متمادي توابعو ليمت

1. $\lim_{x\to a}[f(x)]^\alpha = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^\alpha, \alpha\in\mathbb{R}$, 2. $\lim_{x\to a}[b^{f(x)}] = b^{\lim_{x\to a} f(x)}, b>0$
3. $\lim_{x\to a}(\sin f(x)) = \sin\left[\lim_{x\to a} f(x)\right]$, 4. $\lim_{x\to a}[\log_b f(x)] = \log_b\left[\lim_{x\to a} f(x)\right]$

9.8 تمرين

لاندې ليمتونه وشمېرئ:

1. $\lim_{x\to 2} 25$, 2. $\lim_{x\to 6}(5x)$, 3. $\lim_{x\to 4}(6x+8)$
4. $\lim_{x\to 3}(3x^2-5x+9)$, 5. $\lim_{x\to 0}(3x^8-5x^4+9x+1)$

6. د $f(x)=|x-3|$ لپاره د $\lim_{x\to 2+} f(x)$ او $\lim_{x\to 2-} f(x)$ قېمتونه لاسته راوړئ.

7. د $f(x)=\frac{3x-2}{|x|-2}$ لپاره $\lim_{x\to 0+} f(x)$ او $\lim_{x\to 0-} f(x)$ قېمتونه ترلاسه کړئ.

8. په $f(x)=\begin{cases}3x-2 & , \quad x\le 1\\ 2x+a & , \quad x>1\end{cases}$ تابع کې د a مقدار داسې وټاکئ چې $\lim_{x\to 1} f(x)$ موجود وي.

لاندې لیمټونه وشمېرئ:

9. $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$, 10. $\lim_{x\to -3}\frac{x^2+5x+6}{x^2-x-12}$, 11. $\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x+1}$

12. $\lim_{x\to 3}\frac{x-9}{\sqrt{x}-3}$, 13. $\lim_{x\to 9}\frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}$, 14. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{2x}$

15. $\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{2x^2}$, 16. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{2x}$, 17. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x}$

18. $\lim_{x\to -\infty}\frac{1}{x^3}$, 19. $\lim_{x\to -\infty}\frac{x+3}{x^2-1}$, 20. $\lim_{x\to -\infty}\frac{4x^3-3}{2x^2+7x-1}$

21. $\lim_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}+x\right)$, 22. $\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{16x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{4x+\sqrt{x}}}$

23. $\lim_{x\to +\infty}\left(1-\frac{1}{2x}\right)^{2x}$, 24. $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^{x+2}$, 25. $\lim_{x\to -\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{-\sqrt{2}\,x}$

26. $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{x}$, 27. $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln x^8}$, 28. $\lim_{x\to \infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{1+x}$

29. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\alpha x)}{\beta x}$, 30. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-1}{\beta x}$, 29. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(\alpha x)}{\sin^2(\beta x)}$

32. $\lim_{n\to \infty}\frac{2^n-1}{2^n+2}$, 33. $\lim_{n\to \infty}\frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{\frac{1}{8}n^2}$, 34. $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}$

34. $\lim_{x\to -\infty}\frac{\sqrt[5]{x^5-x^3+1}}{2x^2-1}$, 36. $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{10-x}-2}{x-2}$, 37. $\lim_{x\to 1}\frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{x-1}$

38. $\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{16x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{2x+\sqrt{x}}}$, 39. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$, 40. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\ln(\tan x)}{1-\cot x}$

د هرو لاندې تابع ګانو لپاره هغه واټن وټاکئ چې اړونده تابع ګانې پکې متمادي وي:

41. $f(x)=x^2-3x+4$, 42. $g(x)=\frac{4}{x^2-8+10}$

43. $f(x)=x^4+e^x-5$, 44. $g(x)=\log(2x-6)$

45. $f(x)=\frac{e^x+4x}{3e^{2x}-3}$, 46. $g(x)=\sqrt{25-x^2}$

47. وښیئ چې $f(x)=x^3$ تابع په ټولو حقیقي اعدادو کې متمادي ده.

48. ثبوت کړئ چې $g(x)=|x|$ په $x=0$ کې متمادي ده.

لسم څپرکی

د توابعو مشتقونه

مشتق د معاصر ریاضیاتو اړوند تفاضلي حساب او انتګرال یو مهم او اصلي مفهوم دي. د ریاضي عمده بحثونه لکه د انتګرال نظریه او تفاضلي معادلات د مشتق مفهوم په اساس مطرح شوي. که څه هم د مشتق مبحث اوږد دی، خو بیا هم دلته هڅه کوو دغه موضوع لنډه او په شهودي طریقه تر مطالعې لاندې ونیسو، باید وویل شي چې د اړوند قضایاو دقیق ثبوت د ریاضي په انالیز کې مطرح کیږي.

10.1 د مشتق نیونې لومړني اصول

د مشتق تعریف: که چېرې په $y = f(x)$ تابع کې، x متحول د h (اویا Δx) په اندازه زیات شي، په یاده تابع یوه $\Delta y = f(x+h) - f(x)$ زیاتېدنه تحمیل کیږي. د تابع او متحول د زیاتېدنې نسبت عبارت دی:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

که چېرې

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

موجود وي، ویل کیږي $f(x)$ تابع په x نقطه کې مشتق لري. د پاسیني لیمت ترلاسه کولو ته د مشتق نیونې عملیه وایي. د $y = f(x)$ تابع مشتق د پاسیني ښکلګې سره سم د لاندې سمبولونو

$$Dy = Df(x) \text{ ویا } \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} \text{ ، } y' = f'(x)$$

په ذریعه ښودل کیږي، یعنې

$$Df(x) \equiv \frac{d}{dx}[f(x)] \equiv f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

اویا

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} := f'(x)$$

د وروستیو اړیکو معادل د $f(x)$ تابع مشتق په لاندې توګه هم تعریف کیږي.

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

او د $f(x)$ مشتق په $x = x_0$ کې عبارت دی له:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

د مشتق په شمېرنو او قضيو په ثبوتولو کې هر يو پاسينی تعريف کاريږي، خو ځينې يې په ځانګړو حالاتو کې ګټور او مناسب دي.

1 **مثال:** د $f(x)=x^2$ تابع مشتق ترلاسه کوو:

$$f(x+h)=(x+h)^2=x^2+2xh+h^2$$
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}$$

په دې اساس

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h}\Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x.$$

قضيه: که چېرې f تابع په $x=a$ نقطه کې د مشتق نيولو وړ وي، دغه تابع په a کې متمادي ده.

ثبوت: د f تابع له تعريف ناحيې څخه د x لپاره داسې چې $x\neq a$ وي، ليکو چې:

$$f(x)=f(a)+\frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a)$$

له دې ځايه څخه د ليمت د ځانګړنو په پام کې نيول سره لرو چې:

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}f(a)+\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\lim_{x\to a}(x-a)$$
$$=f(a)+f'(a)\cdot 0=f(a)$$

په پايله کې $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$ دی، په دې اساس f تابع په a کې متمادي ده •

د دې قضيې معکوس حالت سهي نه دی، يعنې ممکن تابع په يوه نقطه کې متمادي وي، خو په هغه نقطه کې مشتق ونلري. په هغه نقطو کې چې د تابع ګراف مات شوی وي(ولو که متمادي هم وي)، د تابع مشتق نيونه ممکن نه ده.

2 **مثال:** د $f(x)=|x|$ تابع مشتق په $x=0$ نقطه کې مطالعه کوو. له دې چې مشتق په حقيقت کې د ليمت شمېرل دي، په دې اساس د ښي او کيڼ لور ليمتونه(د ښي او کيڼ لور مشتقونه) يې په صفر نقطه کې څېړو:

$$f'(\overset{+}{0})=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=1$$
$$f'(\overset{-}{0})=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=-1$$

ليدل کيږي چې $f'(\bar{0}) \neq f'(\overset{+}{0})$ دی، نو ځکه تابع په $x=0$ نقطه کې د مشتق نیولو وړتیا نلري، داسې حال کې چې دغه تابع په صفر نقطه کې متمادي ده.

د مشتق هندسي تعبير: که چېرې $M(x,y)$ او $P\left(x_0+\Delta x, f\left(x_0+\Delta x\right)\right)$ نقطې د $y=f(x)$ ګراف پر مخ د x تاکلي قیمت لپاره وتاکل شي، داسې چې Δx د x زیاتوالی وي. لیدل کیږي چې MP مستقیم خط د ګراف قاطع دی، د قاطع او x محور ترمنځ زاویه یعنې $\varphi(\Delta x)$ د Δx اړوند ده. په $M(x,y)$ نقطه کې مستقیم مماس خط، د MP قاطع له نهایي حالت څخه عبارت دی(10.1 شکل)، که چېرې M د ګراف پر مخ P نقطې ته لنډ شي(په بل عبارت Δx صفر ته لنډ شي)، له شکل څخه ښکاري چې:

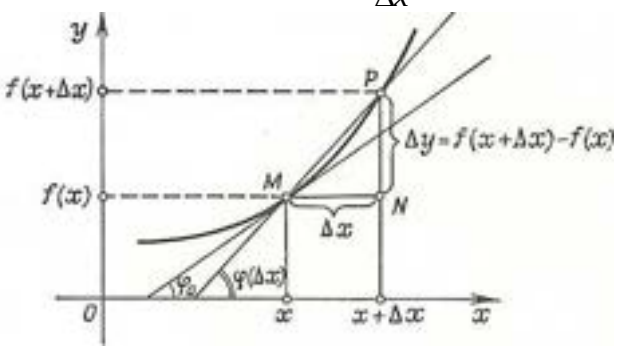
$$\tan\varphi(\Delta x)=\frac{PN}{MN}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

له دې چې $\Delta x \to 0$ ، نو MP قاطع په مماس اوړي نو لرو چې:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\tan\varphi(\Delta x)=\tan\varphi_0$$

داسې حال کې چې φ_0 د مماس او Ox محور ترمنځ زاویه ده. له بل پلوه

$$\lim_{\Delta x\to 0}\tan\varphi(\Delta x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)$$



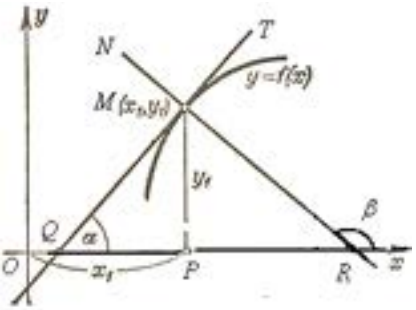
10.1 شکل

په دې اساس $f'(x)=\tan\varphi_0$ (د مماس او x محور ترمنځ د زاویې تنجنت)، د مستقیم مماس خط له میل څخه عبارت دی. نو ځکه $f'(x)$ مشتق د هغه مماس له میل سره مساوي دی چې په $M(x,y)$ نقطه کې له $y=f(x)$ ګراف څخه رسمیږي.

مماس او نارمل: که چېرې د $y=f(x)$ منحني په $M(x_1,y_2)$ نقطه کې T مماس او N نارمل(په مماس عمودی مستقیم) رسم شي(10.2 شکل)، له دې چې د مماس میل $m_T=f'(x_1)$ او د نارمل میل $m_N=-\frac{1}{f'(x_1)}$ دی، په دې اساس د یادو مستقیمونو معادلات په ترتیب عبارت دي له:

د مماس معادله $y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1)$

د نارمل معادله $y - y_1 = -\frac{1}{f'(x_1)}(x - x_1)$



10.2 شکل

د طاقت تابع مشتق: د $f(x) = x^n$ تابع مشتق د n طبيعي عدد لپاره عبارت دی له $f'(x) = nx^{n-1}$ څخه.

ثبوت

$$f(x+h) - f(x) = (x+h)^n - x^n = x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + h^n - x^n$$

$$f(x+h) - f(x) = nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + \cdots + h^n$$

په h د وروستۍ اړيکې له تقسيم څخه لرو چې:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h + \cdots + h^{n-1}$$

په دې اساس

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}xh + \cdots + h^{n-1}\right)$$

$$\boxed{f'(x) = nx^{n-1} \Rightarrow (x^n)' = nx^{n-1}}$$

پاسينۍ قاعده د n طبيعي اعدادو لپاره ثبوت شوې ده، خو فورمول د n حقيقي اعدادو لپاره هم صادق دی، چې وروسته(د لوګارتم په ذريعه د مشتق نيونې په مبحث کې) به يې ثبوت کړو. •

2 مثال: د $y = \sqrt{x}$ تابع مشتق د پاسينۍ قاعدې په اساس وشمېرئ.

$$y = \sqrt{x} \Rightarrow y = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow y' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

3 **مثال:** د $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ تابع مشتق ترلاسه کړئ.

$$y'=(x^{-1/3})'=-\frac{1}{3}x^{-4/3}\Rightarrow y'=-\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$$

4 **مثال:** د $g(x)=c$ ثابت تابع مشتق وشمېرئ.

$$g'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h}\Rightarrow g'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0$$

نو ځکه د ثابت تابع مشتق صفر دی.

د مشتق نیونې الجبري قواعد: که چېرې f ، g توابع په ټولو x قیمتونو کې د مشتق نیولو وړ وي، په دې صورت کې د ($g(x)\neq 0$) لپاره د $f+g$ ، fg او $\frac{f}{g}$ توابعو مشتق عبارت دی له:

$$1.\ (f+g)'=f'+g'\quad ,\quad 2.\ (fg)'=f'g+fg'\quad ,\quad 3.\ \left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$$

ثبوت:1. د توابعو د مجموع مشتق واضح دی، خو د ضرب او تقسیم حالت مشتقونه په لاندې توګه ثبوتوو:

2. د $P(x)=f(x)g(x)$ لپاره د مشتق د تعریف سره سم لرو چې:

$$[f(x)g(x)]'=p'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{p(x+h)-p(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)g(x+h)]-[f(x)g(x)]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h)+f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\lim_{h\to 0}g(x+h)+\lim_{h\to 0}f(x)\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\cdot$$

3. په همدې توګه د $q(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ لپاره د تعریف سره سم لیکو چې:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=q'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{q(x+h)-q(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x)+f(x)g(x)-f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x+h)-f(x)}{h} g(x) - f(x) \frac{g(x+h)-g(x)}{h}}{g(x+h)g(x)h}$$

$$= \frac{\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} g(x) - f(x) \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}}{\lim_{h\to 0} [g(x+h)g(x)]}$$

$$= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

5 **مثال:** د توابعو ضرب حاصل مشتق، تعميمي حالت: که چېرې f او g او h د مشتق نیولو وړ توابع وي، نو

$$(fgh)' = [f(gh)]' = f'(gh) + f(gh)' = f'gh + f(g'h + gh')$$

$$\Rightarrow (fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'.$$

دغه قاعده د ډېر شمېر مشتق نیولو وړ توابعو لپاره تعمیم کېدای شي. •

6 **مثال:** که چېرې f د مشتق نیولو وړ تابع او c یو ثابت عدد (ثابت تابع) وي، نو

$$(cf)' = c'f + cf' = 0 \cdot f + cf' = cf' \Rightarrow (cf)' = cf'.$$

10.2 د مثلثاتي توابعو مشتق

د ساین او کوساین توابعو مشتق: دغه توابع د x ټولو حقیقي اعدادو لپاره د مشتق نیولو وړ دي او

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \quad , \quad \frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x}$$

ثبوت: د دې په پام کې نیولو سره چې $\lim_{h\to 0} \frac{\sinh}{h} = 1$ او $\lim_{h\to 0} \frac{\cosh - 1}{h} = 0$ وي او د مشتق تعریف له مخې لرو:

$$(\sin x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cosh + \cos x \sinh - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[\sin x \left(\frac{\cosh}{h} \right) + \cos x \left(\frac{\sinh}{h} \right) - \frac{\sin x}{h} \right]$$

$$= (\sin x) \lim_{h\to 0} \left(\frac{\cosh - 1}{h} \right) + (\cos x) \lim_{h\to 0} \frac{\sinh}{h} = (\sin x)(0) + (\cos x)(1) = \cos x \cdot$$

په همدې توګه

$$\frac{d}{dx}(co\,s\,x)=\lim_{h\to 0}\frac{co\,s(x+h)-co\,s\,x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{co\,s\,x\,\cosh-\sin x\,\sinh-\cos x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[co\,s\,x\left(\frac{\cosh}{h}\right)-\sin x\left(\frac{\sinh}{h}\right)-\frac{co\,s\,x}{h}\right]$$

$$=(co\,s\,x)\lim_{h\to 0}\left(\frac{\cosh-1}{h}\right)-(\sin x)\lim_{h\to 0}\frac{\sinh}{h}=(co\,s\,x)(0)-(\sin x)(1)=-\sin x\ \bullet$$

د تنجنت او کوتنجنت توابعو مشتقونه: د توابعو د تقسیم حاصل مشتق نیونې طریقې په تطبیق کولو سره کولی شو ولیکو:

$$\frac{d}{dx}(\tan x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)=\frac{\cos x\ \frac{d}{dx}\sin x-\sin x\ \frac{d}{dx}\cos x}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x\ .$$

په همدې توګه

$$\frac{d}{dx}(co\,t\,x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{co\,s\,x}{\sin x}\right)=\frac{\sin x\ \frac{d}{dx}\cos x-co\,s\,x\ \frac{d}{dx}\sin x}{\sin^2 x}$$

$$=\frac{-\sin^2 x-co\,s^2 x}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x}=-co\sec^2 x\ \bullet$$

په پایله کې

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\tan x)&=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x\\ \frac{d}{dx}(co\,t\,x)&=-\frac{1}{\sin^2 x}=-c\,sc^2 x\end{aligned}}$$

7 **مثال:** د $y=\frac{x^2}{\cos x}$ تابع مشتق ترلاسه کوو:

$$y'=\frac{2x\cos x-(-\sin x)x^2}{\cos^2 x}=\frac{2x\cos x+x^2\sin x}{\cos^2 x}$$

8 **مثال:** د $y=x^3\sin x$ تابع مشتق ترلاسه کوو:

$$y'=(x^3)'\sin x+(x^3)\sin' x=3x^2\sin x+x^3\cos x\,.$$

10.3 د نمائي او لوګارتمي توابعو مشتق

د $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ او e غيرناطق عدد چې د طبيعي لوګارتم اساس دی، په پام کې نيولو سره، په دې پاراګراف کې د نمائي او لوګارتمي توابعو مشتق مطرح کيږي.

د نمائي توابعو مشتق: د $f(x)=a^x$ تابع مشتق داسې حال کې چې $a>0$ وي عبارت دی له

$f'(x)=\left(a^x\right)'=a^x\ln a$ څخه.

ثبوت: د قاعدې له مخې لرو

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a^x\left(a^h-1\right)}{h}=a^x\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$$

$$=a^x\lim_{h\to 0}\frac{e^{h\ln a}-1}{h}=a^x(\ln a)\lim_{h\to 0}\frac{e^{h\ln a}-1}{h\ln a}=a^x(\ln a)(1)=a^x\ln a$$

يعنې

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(a^x\right)=a^x\ln a}$$

د لوګارتمي توابعو مشتق: د $f(x)=\log_a x$ تابع مشتق عبارت دی له

$f'(x)=\left(\log_a x\right)'=\frac{1}{x}\log_a e$ څخه.

ثبوت: د $e=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ په کارولو سره کولی شو وليکو:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{h}\log_a\frac{x+h}{x}\right]=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\left[\frac{x}{h}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\log\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}=\frac{1}{x}\log_a\left[\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]=\frac{1}{x}\log_a e$$

يعنې

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\log_a x\right)=\frac{1}{x}\log_a e}$$

پايله: د طبيعي لوګارتمي او طبيعي نمائي توابعو په ځانګړو حالاتو کې لرو چې:

$$\boxed{\begin{aligned}
&1.\ \frac{d}{dx}(\ln x)=\frac{d}{dx}(\log_e x)=\frac{1}{x}\log_e e=\frac{1}{x}\\
&2.\ \frac{d}{dx}\left(e^x\right)=e^x\ln e=e^x(1)=e^x\\
&3.\ \frac{d}{dx}(\log x)=\frac{d}{dx}(\log_{10} x)=\frac{1}{x}\log_{10} e=\frac{\log e}{x}
\end{aligned}}$$

9 **مثال:** د $f(x)=x^2e^x$ تابع مشتق ترلاسه کړئ.

حل : د ضرب حاصل قاعده په پام کې نیسو:

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left(x^2e^x\right)=e^x\frac{d}{dx}\left(x^2\right)+x^2\frac{d}{dx}\left(e^x\right)=2xe^x+x^2e^x$$

10**مثال:** د $f(x)=e^x\sin x$ تابع دویم مشتق ترلاسه کړئ.

حل:

$$f'(x)=\left(e^x\sin x\right)'=\left(e^x\right)'\sin x+e^x\left(\sin x\right)'$$
$$=e^x\sin x+e^x\cos x=e^x\left(\sin x+\cos x\right)$$
$$f''(x)=\left(e^x\sin x\right)''=\left[e^x\left(\sin x+\cos x\right)\right]'$$
$$=\left(e^x\right)'\left(\sin x+\cos x\right)+e^x\left(\sin x+\cos x\right)'$$
$$=e^x\left(\sin x+\cos x\right)+e^x\left(-\sin x+\cos x\right)$$
$$\Rightarrow f''(x)=2e^x\cos x\cdot$$

11 **مثال:** د $f(x)=\frac{\ln x}{\sin x}$ تابع مشتق ترلاسه کړئ.

حل : د توابعو د تقسیم حاصل له مشتق نیولو څخه لرو چې:

$$f'(x)=\left(\frac{\ln x}{\sin x}\right)'=\frac{(\ln x)'(\sin x)-(\ln x)(\sin x)'}{\sin^2 x}$$
$$=\frac{\left(\frac{1}{x}\right)(\sin x)-(\ln x)(\cos x)}{\sin^2 x}=\frac{\sin x-x\ln x\cos x}{x\sin^2 x}$$

10.4 د مرکب توابعو مشتق نیونه

دغه مبحث د توابعو په مشتق نیونه کې مهم رول لوبوي، دلته په دې موضوع څغلنده نظر تېروو:

د مرکب تابع مشتق(د تابع، تابع مشتق): کـه چېرې $y=f(u)$ او $u=g(x)$ وي پـه دې صورت کې د $y=f(g(x))$ ابع مشتق x متحول ته په کتو عبارت دی له:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left[f\left(g(x)\right)\right]=\frac{d}{du}f(u)\frac{du}{dx}}$$

ثبوت: د $\Delta y=f(u+\Delta u)-f(u)$ او $\Delta u=g(x+\Delta x)-g(x)$ لپاره لرو چې

$\Delta u\to 0\Leftrightarrow \Delta x\to 0$

په دې توګه

$$y'_x = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta u\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\right)\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right) = y'_u\cdot u'_x$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}f\ (u(x)) = \frac{d}{du}f\ (u(x))\frac{d}{dx}u(x)$$

ثبوت (دويمه طريقه): د دې په پام کې نيول سره چې $g(x)\to g(y) \Leftrightarrow x\to y$ دی، کولی شو وليکو:

$$\frac{d}{dx}f\ (g(x)) = \lim_{y\to x}\frac{f\ (g(y))-f\ (g(x))}{y-x}$$

$$= \lim_{g(y)\to g(x)}\frac{f\ (g(y))-f\ (g(x))}{g(y)-g(x)}\lim_{y\to x}\frac{g(y)-g(x)}{y-x} = f'_g g'_x$$

$$\boxed{f'_x(g(x)) \quad = \quad f'_g(g(x))g'_x(x).}$$

2 مثال: د $y = \left(5x^2-3x+8\right)^4$ **تابع مشتق ترلاسه کړئ.**

حل: د $u = 5x^2-3x+8$ **او** $y = u^4$ **لپاره لرو چې**

$$y' = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{d}{du}\left(u^4\right)\frac{d}{dx}\left(5x^2-3x+8\right) = 4u^3\left(10x-3+0\right)$$

$$= 4\left(5x^2-3x+8\right)^3\left(10x-3\right)\cdot$$

3 مثال: د $g(x) = \sqrt[4]{\frac{x}{1-3x}}$ **تابع مشتق ترلاسه کړئ.**

حل:

$$g'(x) = \left(\sqrt[4]{\frac{x}{1-3x}}\right)' = \left[\left(\frac{x}{1-3x}\right)^{\frac{1}{4}}\right]' = \frac{1}{4}\left(\frac{x}{1-3x}\right)^{-\frac{3}{4}}\left(\frac{x}{1-3x}\right)'$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{x}{1-3x}\right)^{-\frac{3}{4}}\left[\frac{(1)(1-3x)-(-3)x}{(1-3x)^2}\right] = \frac{1}{4x^{\frac{3}{4}}\left((1-3x)^{\frac{5}{4}}\right)}\cdot$$

4 مثال: د $g(x) = \cos x^2 + 5\left(\frac{3}{x}+4\right)^6$ **تابع مشتق ترلاسه کړئ.**

حل:

$$\frac{dg}{dx} \quad = \quad \frac{d}{dx}\left[\cos\left(x^2\right)\right] \quad + \quad 5\frac{d}{dx}\left(3x^{-1}+4\right)^6$$

$$= -\sin x^2\frac{d}{dx}\left(x^2\right)+5\left[6\left(3x^{-1}+4\right)^5\frac{d}{dx}\left(3x^{-1}+4\right)\right]$$

$$= \quad \left(-\sin x^2\right)\left(2x\right) \quad + \quad 30\left(3x^{-1}+4\right)^5\left(-3x^{-2}\right)$$

$$= -2x \sin x^2 - 90x^{-2}\left(3x^{-1}+4\right)^5$$

د ضمني توابعو مشتق نيونه: که چېرې x او y متحولين د $y = f(x)$ اړيکې په مرسته يوه بل ته مربوط شي، په دې حالت کې وايي y د x متحول صريح(ښکاره) تابع ده، خو ممکن د x او y ترمنځ اړيکې د $F(x,y)=0$ اړيکې په مرسته وتاکل شي، په دې صورت کې ويل کيږي چې y د x يوه ضمني تابع ده.

د مثال په توګه $x^2+y^2-r^2=0$ معادلې دوې $y=\sqrt{r^2-x^2}$ او $y=-\sqrt{r^2-x^2}$ صريح تابع ګانې افاده کوي، داسې حال کې چې پاسينۍ معادله د پاسينيو تابع ګانو ضمني حالت دی.

x ته په کتو د y ضمني تابع مشتق ترلاسه کولو په موخه، معمولا د تاکلې معادلې دواړه خواوې x ته په کتو داسې مشتق نيسو چې په هغه کې y متحول په x پورې تړلی تابع فرض شوې وي. په همدې توګه آخر کې د y تابع مشتق x متحول ته په کتو ترلاسه کيږي، خو په دويمه طريقه کې، د $F(x,y)=0$ اړيکې او F'_x او F'_y په پام کې نيولو سره چې په ترتيب x او y متحولينو ته په کتو د $F(x,y)$ دوه متحوله تابع مشتقونه دي، غوښتل شوی $\frac{dy}{dx}$ مشتق عبارت دی له:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}}$$

5 **مثال.** لومړی طريقه: د y مشتق x ته په کتو له $x^2+y^2-r^2=0$ ضمني تابع څخه ترلاسه کړئ.

حل:

$$(x^2+y^2-r^2)'=0 \Rightarrow 2x+2yy'=0 \Rightarrow y'_x = -\frac{x}{y}.$$

دويمه طريقه: د $F(x,y)=x^2+y^2-r^2$ لپاره ښکاره ده چې $F'_x=2x$ او $F'_y=2y$ دي په دې اساس:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

6 **مثال:** د y مشتق نظر x ته له $y^6-y-x^2=0$ ضمني تابع څخه ترلاسه کړئ.

$$y^6-y-x^2=0 \Rightarrow 6y^5y'-y'-2x=0 \Rightarrow y'=\frac{2x}{6y^5-1}$$

د لوګارتم په مرسته مشتق نيونه: په ډېر شمير مواردو لکه نمايي توابعو، د توابعو ضرب او تقسم حاصل کې د توابعو مشتق د لوګارتم په مرسته شمېرل کيږي، داسې چې تر هر څه د مخه د $y = f(x)$ اړيکې له دواړو خواوو څخه طبيعي لوګارتم نيسو:

$$\ln y = \ln f(x)$$

په $\ln f(x)$ کې د اړینو عملیو وروسته، د پاسینۍ اړیکې له دواړو خواوو څخه د ضمني تابع په توګه مشتق نیسو نو ترلاسه کیږي چې:

$$[\ln f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)} \Rightarrow f'(x) = f(x)\left[\ln f(x)\right]'$$

7 **مثال:** د طاقت تابع مشتق: که څه هم د $y = x^n$ تابع مشتق مو د $n \in \mathbb{N}$ لپاره ترلاسه کړ، خو اوس د $y = x^\alpha$ تابع مشتق داسې حال کې چې α یو حقیقي عدد فرض شوی وي، د لوګارتم په مرسته شمېرو:

$$y = x^\alpha \Rightarrow \ln y = \ln x^\alpha \Rightarrow \ln y = \alpha \ln x \Rightarrow (\ln y)'_x = (\alpha \ln x)'_x$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{\alpha}{x} \Rightarrow y' = \frac{\alpha}{x} y = \frac{\alpha}{x} x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1} \Rightarrow \left(x^\alpha\right)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

8 **مثال:** د نمائي تابع مشتق. د $y = a^x$ تابع مشتق د لوګارتم په مرسته ترلاسه کړئ.

حل:

$$y = a^x \Rightarrow \ln y = \ln a^x \Rightarrow \ln y = x \ln a \Rightarrow (\ln y)'_x = (x \ln a)'_x$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = \ln a \Rightarrow y' = y \ln a = a^x \ln a \Rightarrow y' = a^x \ln a$$

9 **مثال:** د $y = x^{2x}$ تابع مشتق د لوګارتم په مرسته ترلاسه کړئ.

$$\ln y = \ln x^{2x} \Rightarrow \ln y = 2x \ln x$$

$$\Rightarrow (\ln y)' = (2x \ln x)' \Rightarrow \frac{y'}{y} = 2\ln x + 2x \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow y' = 2(\ln x + 1)y = 2(\ln x + 1)x^{2x}.$$

10 **مثال:** د $y = u^v$ تابع مشتق ترلاسه کړئ.

$$\ln y = \ln u^v \Rightarrow (\ln y)' = (v \ln u)' \Rightarrow \frac{y'}{y} = v' \ln u + v (\ln u)'$$

$$\Rightarrow y' = (v' \ln u + v \frac{u'}{u}) y \Rightarrow y' = (v' \ln u + v \frac{u'}{u}) u^v.$$

11 **مثال:** د $y = \frac{(x+1)^2 \sqrt{x-1}}{(x+4)^3 e^x}$ تابع مشتق ترلاسه کړئ.

$$\ln y = 2\ln(x+1) + \frac{1}{2}\ln(x-1) - 3\ln(x+4) - x.$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x+1} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{3}{x+4} - 1.$$

$$\Rightarrow y' = \left[\frac{2}{x+1} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{3}{x+4} - 1\right]\frac{(x+1)^2\sqrt{x-1}}{(x+4)^3 e^x}$$

د تابع معکوس مشتق نیونه: که f او g توابع د یوه بل معکوس وي ، په هغه صورت کې

$$y = f(x) \Leftrightarrow g(y) = x$$

له $g(y) = x$ اړیکې څخه د $\frac{dy}{dx}$ ترلاسه کولو په موخه، د تابع، تابع قاعدې په پام کې نیول سره کولی شو د ضمني تابع په توګه يې مشتق ونیسو:

$$\frac{d}{dx} g(y) = \frac{d}{dx} x \Rightarrow \frac{dg}{dy}\frac{dy}{dx} = 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dg}{dy}} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

په دې اساس د $y = f(x)$ تابع مشتق د اړوند معکوس تابع له جنسه يې عبارت دی له:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}}$$

په اکثر مواردو کې د یوې تابع مشتق داسې حال کې چې د معکوسې تابع مشتق يې ولرو ، له پاسنۍ طریقې څخه په آسانۍ ترلاسه کولی شو.

د معکوس مثلثاتي توابعو مشتق: د معکوس مثلثاتي توابعو مشتق عبارت دی له:

$$\frac{d}{dx}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad , \quad \frac{d}{dx}(\arccos x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$\frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2} \quad , \quad \frac{d}{dx}(\operatorname{arc\,cot} x) = \frac{-1}{1+x^2}$$
$$\frac{d}{dx}(arc\sec x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \quad , \quad \frac{d}{dx}(arc\csc x) = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

ثبوت: د $y = \arcsin x \Leftrightarrow \sin y = x$ او د تابع د معکوس مشتق په پام کې نیول سره:

$$\frac{d}{dx}(\arcsin x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d}{dy}(\sin y)} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

ضمنا د $y = \arccos x \Leftrightarrow \cos y = x$ لپاره کولی شو وليکو

$$\frac{d}{dx}(\arccos x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d}{dy}(\cos y)} = \frac{1}{-\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

او په همدې توګه $y = \arctan x \Leftrightarrow \tan y = x$ په دې اساس

$$\frac{d}{dx}(\arctan x)=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\frac{d}{dy}(\tan y)}=\frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}}=\frac{\cos^2 y}{1}$$

$$=\frac{\cos^2 y}{\cos^2 y+\sin^2 y}=\frac{\frac{\cos^2 y}{\cos^2 y}}{\frac{\cos^2 y}{\cos^2 y}+\frac{\sin^2 y}{\cos^2 y}}=\frac{1}{1+\tan^2 y}=\frac{1}{1+x^2}$$

د $arc\sec x$ ، $arc\csc x$ او $arc\cot x$ توابعو مشتقونه هم په ورته ډول ترلاسه کيږي.

12 **مثال:** د $y=(\arctan x)^5$ تابع مشتق ترلاسه کوو.

$$y'=5(\arctan x)^4(\arctan x)'=5(\arctan x)^4\frac{1}{1+x^2}.$$

د توابعو پارامتريک بڼودنه او اړونده مشتق نيونې يې

څرنګه چې د توابعو په مبحث کې مو وويل، ممکن $y=f(x)$ تابع په غير مستقيم ډول د دريم t متحول(t پارامتر) په توګه په لاندې ډول وښودل شي:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t)\\ y &= \psi(t)\end{aligned}\right\}$$

په داسې مواردو کې د y تابع او x متحول ترمنځ اړيکې په ټاکلو انتروالونو کې کېدای شي توجيه شي او د توابعو دا شان بڼودل، د تابع پارمتريک بڼودنه نومېږي. د ډېرو جالبو منحنې ګانو لکه دايرې، بيضوي او داسې نورو اړونده معادلې په پارامتريک ډول بڼودل او تحليل کيدای شي.

که چېرې φ معکوس تابع، Φ ونومو، په دې صورت کې

$$x=\varphi(t) \quad \Leftrightarrow \quad t=\Phi(x)$$

نو ځکه $x=\varphi(t)$ او $y=\psi(t)$ اړيکې په دوو $t=\Phi(x)$ او $y=\psi(t)$ اړيکو اوړي چې دلته y د x متحول د تابع، تابع ده، نو

$$y'_x=y'_t t'_x=\psi'_t(t)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

داسې حال کې چې $t'_x=\frac{1}{x't}=\frac{1}{\varphi'(t)}$ په پام کې نيول شوی، نو

$$\boxed{\left.\begin{aligned} x&=\varphi(t)\\ y&=\psi(t)\end{aligned}\right\}\Rightarrow y'_x=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}=\frac{y'_t}{x'_t}}$$

د غه فورمول په لاندې توګه ليکي:

$$\boxed{\left.\begin{aligned} x&=\varphi(t)\\ y&=\psi(t)\end{aligned}\right\}\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}}$$

مثال 13. د x متحول څخه y تابع، د لاندې پارامتریک معادلو په ذریعه راکړل شوې.

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos t \\ y &= r\sin t \end{aligned}\right\}$$

$\frac{dy}{dx}$ مشتق ترلاسه کړئ.

حل.
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{(r\sin t)'}{(r\cos t)'} = \frac{r\cos t}{-r\sin t} \Rightarrow y'_x = -catt.$$

مثال: 14 $\left.\begin{aligned} x &= 2t-1 \\ y &= t^2 \end{aligned}\right\}$ پارامتریک تابع په پام کې ونیسئ او $\frac{dy}{dx}$ یې ترلاسه کړئ.

حل.
$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(t^2)'}{(2t-1)'} = \frac{2t}{2} = t$$

مثال: 15
$$\left.\begin{aligned} x &= e^{-t} \\ y &= e^{2t} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2e^{2t}}{-e^{-t}} = -2e^{3t}$$

10.5 د هایپربولیک او معکوس توابعو مشتق نیونه

په اوومځپرکي کې د دوو e^x او e^{-x} نمایي توابعو له ترکیب څخه څلور تابع (هایپربولیک توابع) ترلاسه شوې:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad , \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad , \quad \coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

د هایپربولیک توابعو مشتقونه، د هایپربولیک تابع او اکسپونشیل توابعو د مشتق له تعریف څخه ترلاسه کیږي.

$$(\sinh x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

$$(\cosh x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

په دې اساس $\boxed{(\sinh x)' = \cosh x \quad , \quad (\cosh x)' = \sinh x}$

د $\tanh x$ او $\coth x$ توابعو مشتق نیونه، د $\sinh x$ او $\cosh x$ نسبت په توګه په آسانۍ ترلاسه کیږي.

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \quad , \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

$$\left(\tanh x\right)' = \left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)' = \frac{\cos h^2 x - \sin h^2 x}{\cos h^2 x} = \frac{1}{\cos h^2 x}$$

$$\left(co\tanh x\right)' = \left(\frac{\cosh x}{\sinh x}\right)' = \frac{\sin h^2 x - \cos h^2 x}{\cos h^2 x} = \frac{-1}{\cos h^2 x}$$

نو ځکه

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\tanh x\right) = \frac{1}{\cos h^2 x} \quad , \quad \frac{d}{dx}\left(\coth x\right) = \frac{-1}{\sin h^2 x}}$$

د معکوس هایپربولیک توابعو مشتق: معکوس هایپربولیک توابع چې په اووم څپرکي کې ولوستل شوې، په لاندې توګه دي:

$$\arcsin hx = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right), x \in \mathbb{R} \quad , \quad \arccos hx = \ln\left(x \pm \sqrt{x^2+1}\right), x \geq 0$$

$$\arctan hx = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}, \ |x|<1 \quad , \quad \operatorname{arc\,cot} hx = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}, \ |x|>1$$

د معکوس هایپربولیک توابعو مشتقونه عبارت دي له:

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{d}{dx}\left(\arcsin hx\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad , \quad \frac{d}{dx}\left(\arccos hx\right) = \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}} \\ &\frac{d}{dx}\left(\arctan hx\right) = \frac{1}{1-x^2} \quad , \quad \frac{d}{dx}\left(\operatorname{arc\,coth} x\right) = \frac{-1}{x^2-1} \end{aligned}}$$

ثبوت: د $\arcsin hx$ تابع مشتق عبارت دی له:

$$y = \arcsin hx \Leftrightarrow \sinh y = x$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d}{dy}\left(\sinh y\right)} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

د نورو هایپربولیک توابعو مشتقونه هم په پاسینۍ طریقه ترلاسه کیږي.

د $\arccos hx$ تابع مشتق ترلاسه کولو لپاره دویمه طریقه کاروو:

$$\left(\arcsin hx\right)' = \left[\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\right]' = \frac{\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)'}{x + \sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{x + \sqrt{x^2+1}}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

د هایپربولیک توابعو مشتقونه کولی شو په هرو دوو پاسینو طریقو ترلاسه کړو •

10.6 متوالي مشتقونه

د يوې نوې تابع په توګه د يوې تابع مشتق کېدای شي د مشتق نيولو وړ وي، د تابع د مشتق، مشتق ته دويم مرتبه مشتق وايي، په همدې توګه له يوې تابع کېدای شي ځينې مهال څو ځله او يا حتی بېنهايت مرتبه مشتق ونيسو او دغه مشتقونه په متوالي توګه په لاندې توګه ښيي.

د مشتقونو مراتب	متوالي مشتقونه
تابع	$y = f(x)$
لومړی مشتق	$y' = \frac{dy}{dx} = f'(x)$
دويم مشتق	$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x)$
دريم مشتق	$y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = f'''(x)$
n ام مشتق	$y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n} = f^{(n)}(x)$

1 **مثال:** د $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ تابع لومړی، دويم، دريم او څلورم مشتقونه ترلاسه کړئ.

حل

$$\begin{cases} y = ax^3 + bx^2 + cx + d \ , \ y' = 3ax^2 + 2bx + c \\ y'' = 6ax + 2b \quad , \quad y''' = 6a \quad , \quad y^{(4)} = 0 \end{cases}$$

2 **مثال:** د $y = \sin x$ متوالي مشتقونه وشمېرئ.

حل

$$y = \sin x \quad , \quad y'' = \cos x \quad , \quad y''' = -\sin x \quad , \quad y^{(4)} = -\cos x$$
$$y^{(5)} = \sin x \quad , \quad y^{(6)} = \cos x \quad , \quad y^{(7)} = -\sin x \quad , \quad y^{(8)} = -\cos x$$
$$y^{(9)} = \sin x \quad , \quad y^{(10)} = \cos x \quad , \quad y^{(11)} = -\sin x \quad , \quad y^{(12)} = -\cos x$$

3 **مثال:** د $y = e^x$ متوالي مشتقونه وليکئ.

حل

$$y = y' = y'' = y''' = y^{(4)} = \cdots = e^x$$

د متوالي مشتقونو قواعد: که چېرې u او v توابع n ام مرتبه مشتقونه ولري، نو:

$$i. \ (\lambda u(x))^{(n)} = \lambda u^{(n)}(x) \quad , \quad ii. \ (u+v)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)}$$
$$iii. \ (uv)' = u'v + uv' \quad , \quad iv. \ (uv)'' = u''v + 2u'v' + uv''$$
$$v. \ (uv)''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''$$
$$vi. \ (uv)^{(4)} = u^{(4)}v + 4u'''v' + 6u''v'' + 4u'v''' + uv^{(4)}$$

كه ځير شو، د نيوتن د بينوم انكشافي حالت او د دوو تابع ګانو ضرب حاصل متوالي مشتقونو ترمنځ ورته والى او تناظر ليدل كيږي، داسې چې:

$$(u\,v)^{(n)} = u^{(n)}v + \binom{n}{1}u^{(n-1)}v' + \binom{n}{2}u^{(n-2)}v'' + \binom{n}{3}u^{(n-3)}v''' + \cdots + uv^{(n)}$$

وروستئ فورمل د لايپ نيټ فورمول پنامه يادېږي.

4 **مثال:** د $y = e^{\alpha x}\cdot x^2$ تابع دريم مشتق ترلاسه كړئ.

حل

$$y' = \left(e^{\alpha x}\right)'.x^2 + e^{\alpha x}\left(x^2\right)' = \alpha\, e^{\alpha x}.x^2 + 2e^{\alpha x}x$$
$$y'' = (e^{\alpha x})''x^2 + 2(e^{\alpha x})'(x^2)' + e^{\alpha x}(x^2)''$$
$$= a^2e^{\alpha x}x^2 + 4ae^{\alpha x}x + 2e^{\alpha x}$$
$$y''' = (e^{\alpha x})'''x^2 + 3(e^{\alpha x})''(x^2)' + 3(e^{\alpha x})'(x^2)'' + e^{\alpha x}(x^2)'''$$
$$= a^3e^{\alpha x}x^2 + 6e^{\alpha x}\alpha^2 x + 6\alpha e^{\alpha x}$$

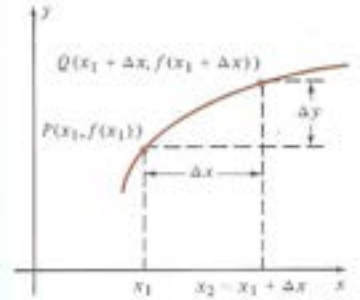
10.7 تزايد او ديفرنسيل (تفاضلي)

كه چېرې $y = f(x)$ معادله په پام كې ونيسو، چې f پكې يوه تابع وي. په دې ډېر شمېر مواردو كې د x متحول وړوكې بدلون شمېرنې مطرح كيږي چې په دې اساس د y اړوند متحول بدلون هم بايد وتاكل شي. كه چېرې له x_1 څخه x_2 ته د متحول د بدلون ميزان Δx وي، په دې صورت كې ليكي چې

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

Δx عدد د x تزايد ګڼل كيږي. نو $x_2 = x_1 + \Delta x$ د x هغه مقدار دى چې د لومړني قيمت او تزايد مجموع ګڼل كيږي(10.3 شكل). په ورته توګه Δy د y متحول هغه تزايد دى، چې د Δx له تزايد سره اړوند وي، په دې اساس

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1) = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$$



10.3 شكل

د تزايد تعريف: كه چېرې x متحول د Δx په اندازه زيات شي ، د y متحول تزايد عبارت دی له:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

1 **مثال:** كه $y = 3x^2 - 5$ په پام كې ونيسو . د Δx په زياتېدو سره د Δy تزايد وټاكئ.

حل

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = \lfloor 3(x+\Delta x)^2 - 5 \rfloor - [3x^2 - 5]$$
$$= 3\left[x^2 + 2x(\Delta x) + (\Delta x)^2\right] - 5 - [3x^2 - 5]$$
$$= 3x^2 + 6x(\Delta x) + 3(\Delta x)^2 - 5 - 3x^2 + 5 = 6x(\Delta x) + 3(\Delta x)^2$$

په دې اساس $\Delta y = 6x(\Delta x) + 3(\Delta x)^2$

2 **مثال:** د $y = x^3$ زياتوالی(تزايد) ترلاسه كړئ.

حل

$$y + \Delta y = (x+\Delta x)^3 \Rightarrow \Delta y = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - y$$
$$\Rightarrow \quad \Delta y \quad = \quad x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3$$

نو $\Delta y = 3x^2\Delta x + \lfloor 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 \rfloor$

له پاسيني مثالونو څخه ليدل كيږي چې د Δy تزايد د دوو حدونو له مجموع څخه جوړ شوی، داسې چې اصلي برخه يې Δx ته په كتو خطي ده، چې د متحول د تزايد او د تابع مشتق له ضرب حاصل څخه عبارت ده.

تابع	د تابع زياتوالی(تزايد)	د تابع د تزايد اصلي برخه
$y = 3x^2 - 5$	$\Delta y = 6x(\Delta x) + 3(\Delta x)^2$	$\Delta y = 6x(\Delta x)$
$y = x^3$	$\Delta y = 3x^2\Delta x + \lfloor 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 \rfloor$	$\Delta y = 3x^2\Delta x$

د تفاضلي (ديفرنسيل) تعريف: د f تابع تزايد اصلي برخه يعنې $f'(x)\Delta x$ د يادې تابع د ديفرانسيل په نامه يادېږي او ليكي:

$$df(x) = f'(x)dx$$

په دې حالت كې Δx ته د محول ديفرانسيل وايي او په dx سمبول ښودل كيږي.

dx, dy مفاهيم، يعنې د تابع او متحول ديفرانسيلونه د Δx او Δy زياتوالي(تزايدونو) تعبير دی چې د فوق العاده وړو مفاهيمو په توګه په پام كې نيول كيږي، نو د $y = f(x)$ تابع د مشتق مفهوم د همدې دوو ديفرانسيلونو له نسبت څخه عبارت دی، يعنې $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ ، چې د لايپ نيڅ له تعبير سره سمون خوري.

3 **مثال:** د f ، g ، u او v توابع لاندې راکړل شوي دي، ديفرانسيلونه يې وليکئ.

$$f(x)=3x^2+4x \quad , \quad g(\theta)=\sin\theta \quad , \quad u(t)=e^{2t} \quad , \quad v(x)=\ln|x|$$

حل

$$df(x)=f'(x)dx=(6x+4)dx \quad , \quad dg(\theta)=g'(\theta)d\theta=\cos\theta d\theta$$

$$du(t)=u'(t)dt=2e^{2t}dt \quad , \quad dv(x)=v'(x)dx=\tfrac{dx}{x}$$

د ديفرانسيل الجبري قواعد: ديفرانسيل په حقيقت کې مشتق ته ورته مفهوم دی چې ځانګړنې يې هم د مشتق ځانګړنو ته ورته دي.

$$I. \quad dc=0 \ , \ c=const \quad , \quad II. \quad d(cx)=cdx \quad , \quad III. \quad d(u\pm v)=du\pm dv$$

$$IV. \quad d(uv)=udv+vdu \ , \ V. \quad d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{udv-vdu}{v^2} \ , \ VI. \ d(x^{\alpha})=\alpha x^{\alpha-1}dx$$

$$VII. \ d(\sin x)=\cos x\,dx \quad , \quad VIII. \ d(\cos x)=-\sin x dx$$

$$IX. \ d(e^x)=e^x dx \quad , \quad X. \ d(\ln x)=\tfrac{1}{x}dx \quad , \quad XI. \ d(a^x)=(a^x\ln a)dx$$

4 **مثال:** د $y=xe^x+\frac{1}{x}$ تابع ديفرانسيل وليکئ،

حل :

$$dy=d\left(xe^x+\tfrac{1}{x}\right)=\left(xe^x+\tfrac{1}{x}\right)'dx=(e^x+xe^x-x^{-2})dx$$

5.**مثال:** د a^x ، $\ln x$ او $\arctan x$ توابعو ديفرانسيل ترلاسه کړئ.

حل :

$$d(a^x)=(a^x)'dx=a^x\ln a\,dx \ , \ d(\ln x)=(\ln x)'dx=\tfrac{dx}{x}$$

$$d(\arctan x)=(\arctan x)'dx=\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{dx}{1+x^2}$$

10.8 د څپرکي لنډيز

د مشتق تعريف

$$y=f(x)\Rightarrow y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)=\lim_{y\to x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

مشتق نيونه– د تمادیت کافي شرط: په يوه نقطه کې د مشتق نيونې وړ تابع، په هماغه نقطه کې متمادي هم ده.

د مشتق هندسي مفهوم: په يوه نقطه کې د تابع مشتق، د هغه مستقيم له ميل سره مساوي دی چې په هماغه نقطه کې د تابع په ګراف مماس وي.

د ثابت تابع مشتق
1. $f(x)=c \Rightarrow f'(x)=0$

د عینیت تابع مشتق
2. $f(x)=x \Rightarrow f'(x)=1$

د توابعو د مجموع او تفاضل مشتق
3. $(f \pm g)' = f' \pm g'$

د توابعو د ضرب حاصل مشتق
4. $(fg)' = f'g + fg'$

د تابع او ثابت عدد ضرب حاصل مشتق
5. $(cf)' = cf'$

د توابعو تقسیم حاصل مشتق
6. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

د طاقت تابع مشتق
7. $f(x)=x^{\alpha} \Rightarrow f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

د مثلثاتي توابعو مشتق
8. $\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$, 9. $\frac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x$

10. $\frac{d}{dx}(\tan x)=\frac{1}{\cos^2 x}$, 11. $\frac{d}{dx}(\cot x)=\frac{-1}{\sin^2 x}$

د معکوس مثلثاتي توابعو مشتق

12. $\frac{d}{dx}(\arcsin x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, 13. $\frac{d}{dx}(\arccos x)=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

14. $\frac{d}{dx}(\arctan x)=\frac{1}{1+x^2}$, 15. $\frac{d}{dx}(arc\cot x)=\frac{-1}{1+x^2}$

د نمائي توابعو مشتق
16. $\frac{d}{dx}(a^x)=a^x \ln a$, 17. $\frac{d}{dx}(e^x)=e^x$

د لوګارتمي توابعو مشتق

18. $\frac{d}{dx}(\log_a x)=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x \ln a}$, 19. $\frac{d}{dx}(\ln x)=\frac{1}{x}$

د هایپربولیک توابعو مشتق

20. $\frac{d}{dx}(\sinh x)=\cosh x$, 21. $\frac{d}{dx}(\cosh x)=\sinh x$

22. $\frac{d}{dx}(\tanh x)=\frac{1}{(\cosh x)^2}$, 23. $\frac{d}{dx}(\coth x)=\frac{-1}{(\sinh x)^2}$

د معکوس هایپربولیک توابعو مشتق

24. $\frac{d}{dx}(\arcsin hx)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, 25. $\frac{d}{dx}(\arccos hx)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

26. $\frac{d}{dx}(\arctan hx)=\frac{1}{1-x^2}$, 27. $\frac{d}{dx}(arc\coth x)=\frac{1}{x^2-1}$

د مرکب تابع(د تابع تابع) مشتق

28. $\left.\begin{matrix} y=f(u) \\ u=g(x) \end{matrix}\right\} \Rightarrow y'_x = y'_u u'_x \vee \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \vee \frac{d}{dx}\left[f\left(g(x)\right)\right] = \frac{d}{du}f(u)\frac{du}{dx}$

29. $f'(x) = f(x)\left[\ln f(x)\right]'$ د لوګارتم په کارولو سره د تابع شمتق

30. $\left.\begin{matrix} y=(x) \\ x=g(y) \end{matrix}\right\} \Rightarrow y'_x = \frac{1}{x'_y}$ يا $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$ د معکوس توابع مشتق

31. $\left.\begin{matrix} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ د پارامتريک توابعو مشتق

32. $F(x,y)=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}$ د ضمني تابع مشتق

د لايپ نيڅ فورمول

33. $(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + \binom{n}{1}u^{(n-1)}v' + \binom{n}{2}u^{(n-2)}v'' + \binom{n}{3}u^{(n-3)}v''' + \cdots + uv^{(n)}$

34. $y=f(x) \Rightarrow dy = df(x) = f'(x)dx$ د يفرنسيل(تفاضلي)

10.9 تمرين

1. وښيئ چې $f(x)=|x-5|$ تابع په $x=5$ مشتق نلري.

2. $g(x)=-|x+9|$ تابع د x متحول په کومو قيمتونو کې مشتق لري؟

د لاندې توابعو مشتق وشمېرئ:

3. $y = 4x^3 - 6x^2 + 12x - 10$ ، 4. $y = 4x^{\frac{2}{3}} - x^{-2} + \frac{9}{x}$

5. $y = \left(x^2+1\right)\left(x^3-4\right)$ ، 6. $y = \left(x+\frac{1}{x}\right)\left(ax^2+bx+c\right)$

7. $y = 4x^5\left(3x-9\right)^2$ ، 8. $y = 5x^4\sqrt{2x^2+9x+10}$

9. $y = (x-2)\left(x^2+1\right)(2x+3)$ ، 10. $y = \frac{2x}{2x^2+4x+8}$

11. $y = \frac{1-4x^5}{\left(4x+5\right)^2}$ ، 12. $y = \frac{7}{\sqrt{3x-6}}$ ، 13. $y = x^{-7}\sqrt{x}$

14. $y = \left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{2}{x^3}\right)$ ، 15. $y = \sqrt[3]{\left(4x^2+3\right)^2}$

16. $y=\left(x^3+2\right)\sqrt[5]{x^2+1}$ ، 17. $y=\dfrac{\left(5x^2-1\right)^2}{\sqrt{2x^3-3x^2+6}}$

18. $y=|x-5|$ ، 19. $y=|7x-3|$ ، 20. $y=|4x|$

21. $y=5\sin 4x$ ، 22. $y=\cos 2x-\tan 4x+\sin\sqrt{x}$

23. $y=x\sin^3 2x+4\cos^2 x$ ، 24. $y=\cos^5\left(x^2-1\right)$

25. $y=\tan(\cot x)$ ، 26. $y=\dfrac{1}{\cos x}$ ، 27. $y=\dfrac{1}{\sin x}$

28. $y=\sec 5x+-\cos 4x$ ، 29. $y=\sqrt{\tan 7x}$

د لاندې توابعو دويم او دريم مرتبه مشتقونه ترلاسه کړئ:

30. $y=5x^4+3x^2$ ، 31. $y=\sin x-\cos x-x^2+4x$

32. $y=\left(5x^2+3\right)^4$ ، 33. $y=\left(ax^2+bx+c\right)^2$

د لاندې توابعو پنځم مرتبه مشتقونه ترلاسه کړئ:

34. $y=-\sin x$ ، 35. $y=x^4+3x^2-1$ ، 36. $y=\dfrac{1}{x}$

37. له $xy=\cos y$ اړيکې څخه x ته په کتو د y تابع مشتق ترلاسه کړئ.

38. د $y=\sin(x+y)$ تابع مشتق ترلاسه کړئ.

39. د $x^3+y^3+xy=8$ تابع مشتق په $x=0$ کې وشمېرئ.

40. له $y^3-5x^2+4xy=0$ تابع څخه $\frac{dy}{dx}$ مقدار په $x=y=1$ کې ترلاسه کړئ.

د لاندې توابعو مشتق ترلاسه کړئ:

41. $y=\log\dfrac{x}{x+1}$ ، 42. $y=\sqrt{\log x}$ ، 43. $y=\dfrac{\ln x}{x}$

44. $y=2\ln\sqrt{\dfrac{1-x^2}{x}}$ ، 45. $2\ln\left(x^3+4x^2\right)^{\frac{1}{4}}$

46. د $f(x)=\ln\dfrac{x}{x^2+1}$ تابع مشتق په $x=1$ وشمېرئ.

47. د $e^{xy}-2y=0$ تابع مشتق په $(0,0)$ کې ترلاسه کړئ.

48. د $y=(\sin x)^x$ تابع مشتق په $x=\frac{\pi}{2}$ کې ترلاسه کړئ.

د لاندې تابع ګانو مشتق وشمېرئ.

49. $y=e^x\ln x$ ، 50. $y=e^{-\frac{1}{x}}$ ، 51. $y=3^x$

52. $y = \arcsin\left(5x^3 - 2\right)$ ، 53. $y = e^{\arcsin x^2}$

54. $y = \arccos\sqrt{x}$ ، 55. $y = e^{\arccos 4x}$

56. $y = \ln\left(\arctan 7x\right)$ ، 57. $y = ar\cot\left(\sin x\right) + \arctan\left(\cos x\right)$

58. $y = arc\sin\left(e^{3x}\right)$ ، 59. $y = \arccos\sqrt{x} + \arcsin\left(x^2\right)$

60. $y = x\sinh x$ ، 61. $y = (\arcsin x)(\arccos hx)$

62. $y = \dfrac{\arctan x}{x}$ ، 63. $y = \arctan x - arc\coth x$

پەلاندې پارامتري توابعو کې، $\dfrac{dy}{dx}$ ، مشتق ترلاسه کړئ:

64. $\begin{cases} x = 4\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases}$ ، 65. $\begin{cases} x = 2t^2 - 3t + 5 \\ y = 4\sin t + t^3 \end{cases}$ ، 64. $\begin{cases} x = 3e^{2t-1} \\ y = 3\sin^2 t \end{cases}$

65. د $arc\sec x$ ، $arc\csc x$ او $arc\cot x$ توابعو مشتقونه ترلاسه کړئ.

يوولسم څپرکی
د مشتق کارونې

لـه مشـتق څخـه د تـابع بـدلونونو لکـه تزايـد ، تنـاقص، اعظمـي او اصـغري، د ګـراف انحنـا ډولونو(محدب والي او مقعر والي) او انعطاف په مطالعه کې کار اخلي، د دې ترڅنګ لـه مشـتق څخه کولی شو په مبهم حالاتو کې د توابعو لیمت وشمېرو. د طبیعي علومو په برخو لکه فزیک او انجنیـري کـې د مشـتق کـارونې ډیـرې پراخـې دي. پـه دې څپرکـي کـې د مشـتق کـارونې پـه ځینـو پاسینیو مواردو په لنډه توګه راګرځو.

11.1 د تابع ګراف په رسمولو کې د لومړي مشتق کارونې

د یوې تابع د قیمتونو بدلون مسیر د اړونده ګراف په ذریعه یې ټاکل کیږي، معمولا د تابع ګراف په ټاکلو انتروالونو کې تر مطالعې لاندې نیسي او تـابع کېدای شي پـه یـوه انتـروال کې نهایي قیمتونه ولري. د توابعو تزاید او تناقص مفاهیم مخکې مطرح شول(پنځم څپرکی).

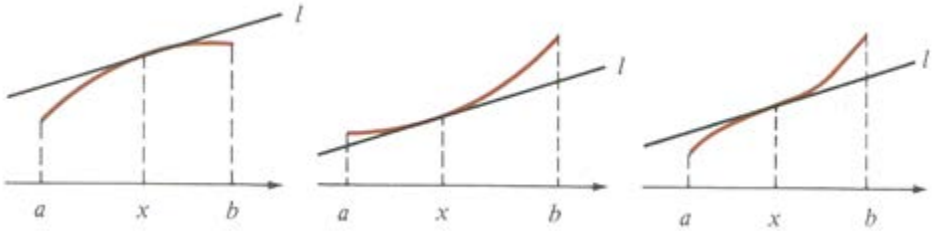
قضیه (د تزاید او تناقص اړین شرایط)

(1) که چېرې $f(x)$ مشتق منونکې تابع په یوه انتروال کې متزاید وي، مشتق یې په دې انتروال کې هیڅکله منفي نه وي، یعنې $f'(x) \geq 0$.

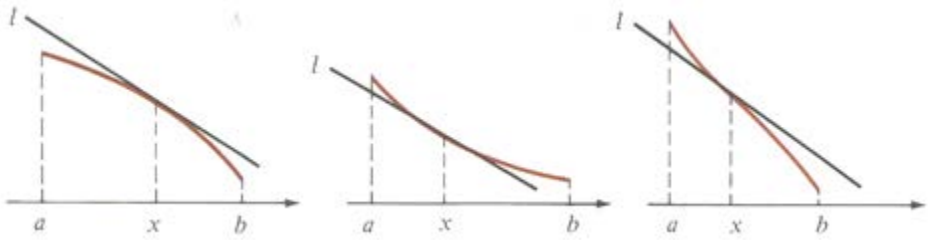
(2) که چېرې $f(x)$ مشتق منونکې تابع په یـوه انتـروال کې متنـاقص وي، د تـابع مشـتق پـه دې انتروال کې مثبت نه وي، یعنې $f'(x) \leq 0$.

ثبوت (1): که تابع په یوه انتروال کې متزاید وي، د تابع د ګراف پـه هر نقطه کې کـه مماس رسم شي، نو د x محور سره حاده زاویه جوړوي(11.3 شکل) او د حاده زاویې تنجنت یعنې د مماس میل مثبت دی، په دې اساس د تابع مشتق(د مماس میل)، په هره نقطه کې منفي نه دی.

(2) په همدې توګه د متناقص تابع د ګراف په هر نقطه کې مماس له افقي محور سره منفرجه زاویه جوړوي، چې د منفرجه زاویې تنجنت(د مماس میل) منفي دی(شکل 11.4)، نو ځکه د تابع مشتق مثبت نه دی.



11.3 شکل د متزاید توابعو ګراف



11.4 شکل د متناقص توابعو ګراف

قضيه(د تزايد او تناقص کافي شرايط): کـه چېرې f تـابع پـه $[a\ ,\ b]$ انـتروال کې متمـادي او پـه $(a\ ,\ b)$ انتروال کې مشتق منونکې وي:

(1) کـه له $(a\ ,\ b)$ څخه د هر x لپاره $f'(x)>0$ وي، نو f پـه $[a\ ,\ b]$ کې متزايد ده.

(2) کـه له $(a\ ,\ b)$ څخه د هر x لپاره $f'(x)<0$ وي، نو f پـه $[a\ ,\ b]$ کې متناقص ده.

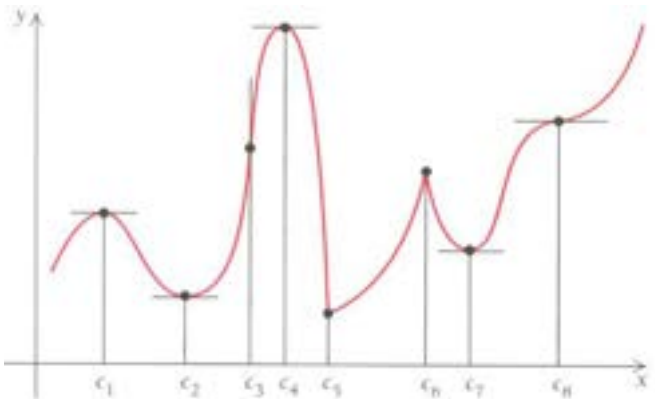
ثبوت: (1) له دې چې له $(a\ ,\ b)$ څخه د هر x لپاره $f'(x)>0$ ده، له $[a\ ,\ b]$ انتروال څخه دوه x_1 او x_2 اعداد داسې په پام کې نيسو چې $x_1<x_2$ وي، او په $[x_1\ ,\ x_2]$ انتروال کې د منځنې قيمت قضيه تطبيق کوو، c عدد په $(x_1\ ,\ x_2)$ انتروال کې موجود دي او

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1)$$

لـه دې چې $x_2-x_1>0$ او $f'(c)>0$ دی، لـه وروسـتۍ اړيکې څخـه پايلـه ترلاسـه کـوو چې $f(x_2)-f(x_1)>0$ دی، يعنې $f(x_2)<f(x_1)$

نو ځکه f متزايد دی. د (2) قضيې ثبوت هم په همدې طريقه کيږي ●

بحراني نقطې: د f تـابع تعريـف لـه نـاحيې څخـه يـوه c داخلي نقطـه د بحراني نقطې پـه نامـه يادېږي، کـه د ګراف مماس پـه $(c\ ,\ f(c))$ کې، افقي حالت ولري او يـا دا چې مشـتق منونکې وي، يعنې $f'(c)=0$ يا $f'(c)$ موجود نه وي(11.5 شکل).



11.5 شکل

1 **مثال:** د $f(x)=(x+5)^2\sqrt[3]{x-4}$ تابع بحراني نقطې ترلاسه کړئ.

حل: د $f(x)$ تابع مشتق شمېرو

$$f'(x)=2(x+5)(x-4)^{\frac{1}{3}}+\frac{(x+5)^2}{3(x-4)^{\frac{2}{3}}}=\frac{6(x+5)(x-4)+(x+5)^2}{3(x-4)^{\frac{2}{3}}}$$

$$=\frac{(x+5)[(x+5)+6(x-4)]}{3(x-4)^{\frac{2}{3}}}=\frac{(x+5)(7x-19)}{3(x-4)^{\frac{2}{3}}}$$

اوس به وګورو چې مشتق د کومو اعدادو لپاره صفر او یا د تعریف وړ نه دی.

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{(x+5)(7x-19)}{3(x-4)^{\frac{2}{3}}}=0\Rightarrow(x+5)(7x-19)=0\Rightarrow x_1=-5, x_2=\frac{19}{7}$$

او د تابع مشتق یعنې $f'(x)$ په $x=4$ نشي تعریف کېدلی، نو د یادې تابع بحراني نقطې عبارت دي له:

$$x_1=-5\ ,\ x_2=\tfrac{19}{7}\ ,\ x_3=4$$

موضعي اعظمي او اصغري: که c د f تابع له تعریف ناحیې څخه یو عدد وي.

(1) $f(c)$ د f تابع موضعي اعظمي ده، که چېرې (a,b) خلاص انتروال c داسې په ځان کې ولري چې، له (a,b) انتروال څخه د هر x لپاره $f(x)\le f(c)$، یعنې $f(c)=\max\limits_{(a,b)} f(x)$ او $(c,f(c))$ موضعي اعظمي نقطې دي.

(2) $f(c)$ د f تابع موضعي اعظمي ده، که چېرې (a,b) خلاص انتروال c داسې په ځان کې ولري چې، له (a,b) انتروال څخه د هر x لپاره $f(x)\ge f(c)$، یا $f(c)=\min\limits_{(a,b)} f(x)$ او $(c,f(c))$ موضعي اعظمي نقطې دي.

موضعي (*local*) اصطلاح په دې معنی ده چې تابع که څه هم په ډېر محدود انتروال کې د اعظمي او اصغري درلودونکې ده، ځینې مهال د موضعي اعظمي او موضعي اصغري په ځای نسبي اعظمي او نسبي اصغري کاریږي. د موضعي اعظمي او موضعي اصغري قیمتونو ته موضعي اکستریم هم وایي.

د فرما قضیه: که چېرې $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انتروال کې متمادي او د $c\in(a,b)$ لپاره د $f(c)$ قیمت اعظمي یا اصغري وي، نو c یوه بحراني نقطه ګڼل کیږي، یعنې $f'(c)=0$ یا f په $x=c$ کې مشتق منونکي نه دي.

ثبوت. په اعظمي یا اصغري نقطه کې مماس مستقیم له x محور سره موازي او میل یې صفر دی $(m=0)$ په دې اساس

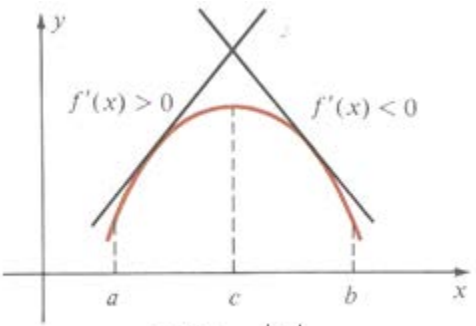
$$f'(c)=m=0\ \bullet$$

د لومړي مشتق په کارولو سره د موضعي اکستريم ټاکل : که f تابع په $[a\ ,\ b]$ انټروال کې متمادي او په $(a\ ,\ b)$ کې مشتق منونکې وي(ولو د c نقطې په استثنا)

(1) که $f'(x)>0$ د $a<x<c$ لپاره او $f'(x)<0$ د $c<x<b$ لپاره وي، نو $f(c)$ د f موضعي اعظمي ده.

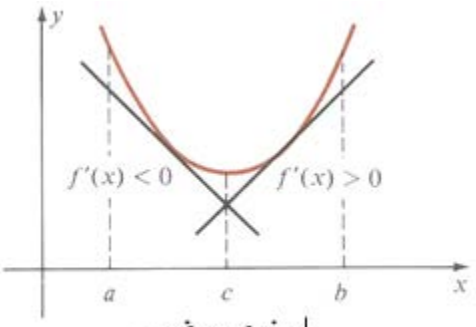
(2) که $f'(x)<0$ د $a<x<c$ لپاره او $f'(x)>0$ د $c<x<b$ لپاره وي، نو $f(c)$ د f موضعي اصغري ده.

(3) که له $(a\ ,\ b)$ څخه د هر x لپاره پرته له c څخه $f'(x)\neq 0$ یا $f'(c)=0$ وي، نو $f(c)$ د f موضعي اکستريم نه دی.



اعظمی موضعی

11.7 شکل



اصغری موضعی

11.6 شکل

2مثال: هغه انټروالونه وټاکئ چې پکې $f(x)=ax^2+bx+c$ تابع یوازې متزاید او یا متناقص وي.

حل. د مشتق صفري نقطې ټاکو:

$$f'(x)=2ax+b\ ,\ f'(x)=0\Rightarrow 2ax+b=0\Rightarrow x=-\tfrac{b}{2a}$$

لومړی حالت $a>0$

x	$x<-\frac{b}{2a}$	$x=-\frac{b}{2a}$	$x>-\frac{b}{2a}$
$f'(x)=2ax+b$	−	0	+
$f(x)=ax^2+bx+c$	متناقص	اصغري قيمت: $f\left(-\frac{b}{2a}\right)=\frac{4ac-b^2}{4a}$	متزايد

لیدل کېږي چې د تابع تزاید انټروال $(-\frac{b}{2a}\ ,\ \infty)$ او د تناقص انټروال یې $(-\infty\ ,\ -\frac{b}{2a})$ دی.

دويم حالت $a < 0$

x	$x < -\frac{b}{2a}$	$x = -\frac{b}{2a}$	$x > -\frac{b}{2a}$
$f'(x) = 2ax + b$	+	0	−
$f(x) = ax^2 + bx + c$	متزايد	اعظمي قيمت: $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{4ac - b^2}{4a}$	متناقص

په دې حالت کې د تزايد انتروال $(-\infty, -\frac{b}{2a})$ او د تناقص انتروال $(-\frac{b}{2a}, \infty)$ دی.
په دې اساس

$$a > 0 \Rightarrow \min f(x) = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

$$a < 0 \Rightarrow \max f(x) = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

مثال: د $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(x^2 - 8)$ تابع موضعي اکسترېم نقطې وټاکئ او اړونده ګراف يې رسم کړئ.

حل: د تابع مشتق شمېرل:

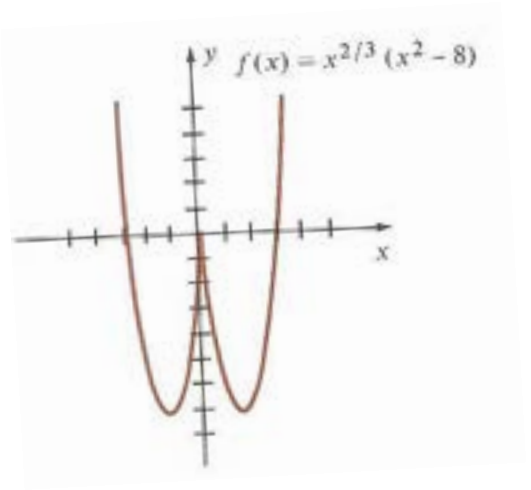
$$f'(x) = x^{\frac{1}{3}}(2x) + (x^2 - 8)\left(\tfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right) = \frac{6x^2 + 2(x^2 - 8)}{3x^{\frac{1}{3}}} = \frac{8(x^2 - 2)}{3x^{\frac{1}{3}}}$$

د بحراني نقطو ټاکل:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{8(x^2 - 2)}{3x^{\frac{1}{3}}} = 0 \Rightarrow 8(x^2 - 2) = 0 \Rightarrow x^2 - 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

او مشتق په $x = 0$ کې تعريف شوی نه دی، په دې اساس تابع درې $-\sqrt{2}$ ، 0 او $\sqrt{2}$ بحراني نقطې لري، په $(-\infty, -\sqrt{2})$ ، $(-\sqrt{2}, 0)$ ، $(0, \sqrt{2})$ او $(\sqrt{2}, \infty)$ ناحيو کې د تابع بدلونونه په لاندې جدول کې مطرح کوو:

انتروال	$(-\infty, -\sqrt{2})$	$(-\sqrt{2}, 0)$	$(0, \sqrt{2})$	$(\sqrt{2}, \infty)$
k ټاکلی عدد	-8	-1	1	8
$f'(k)$	$-\frac{248}{3}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{248}{3}$
د $f'(x)$ اشاره	−	+	−	+
د ګراف بدلون	په $(-\infty, -\sqrt{2}]$ کې متناقص	په $[-\sqrt{2}, 0]$ کې متزايد	په $[0, \sqrt{2}]$ کې متناقص	په $[\sqrt{2}, \infty)$ کې متزايد



11.8 شکل

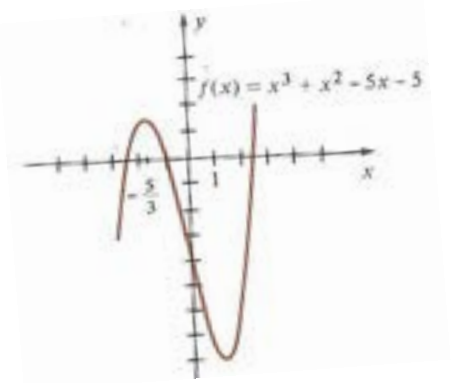
4 **مثال:** د $f(x) = x^3 + x^2 - 5x - 5$ تابع موضعي اکسترېم نقطې وټاکئ او ګراف يې رسم کړئ.

حل : د تابع مشتق شمېرل: $f'(x) = 3x^2 + 2x - 5 = (3x + 5)(x - 1)$

د بحراني نقطو ټاکل: $f'(x) = 0 \Rightarrow (3x + 5)(x - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{5}{3}\ ,\ x_2 = 1$

په دې اساس تابع دوې 1 ، $-\frac{5}{3}$ بحراني نقطې لري، په $\left(-\infty, -\frac{5}{3}\right)$ ، $\left(-\frac{5}{3}, 1\right)$ او $(1, \infty)$ ناحيو کې د تابع تحولات په لاندې جدول کې مطرح کوو:

انتروال	$\left(-\infty, -\frac{5}{3}\right)$	$\left(-\frac{5}{3}, 1\right)$	$(1, \infty)$
k ټاکلی عدد	-2	0	2
$f'(k)$	3	-5	11
د $f'(x)$ اشاره	$+$	$-$	$+$
د ګراف بدلون	په $\left]-\infty, -\frac{5}{3}\right[$ کې متزايد	په $\left]-\frac{5}{3}, 1\right[$ کې متناقص	په $]1, \infty)$ کې متزايد

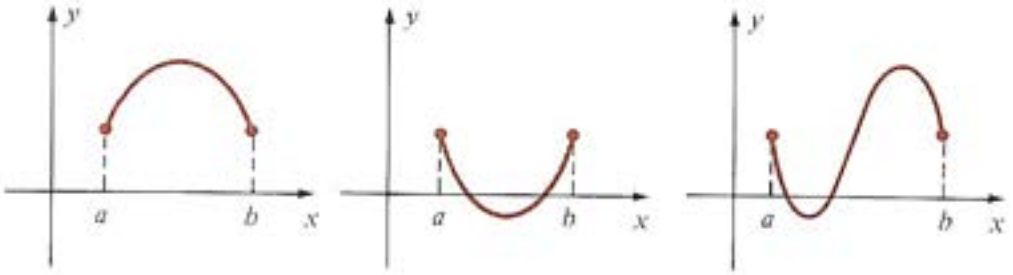


11.9 شکل

11.2 د مشتق تطبيقي قضيې

د رولي قضيه: که چېرې $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي، په (a,b) کې مشتق منونکې او $f(a)=f(b)$ وي، نو لږ تر لږه c له (a,b) انټروال څخه داسې موجود دی چې

$$f'(c)=0$$



11.10 شکل

ثبوت. متمادي تابع په يوه تړلي انټروال کې د قضيې شرط په پام کې نيولو سره، لږ تر لږه يوه اعظمي او يوه اصغري لري(11.10 شکل)، فرضوو چې دغه نقطه يا يوه له دې نقطو څخه $(c, f(c))$ وي، د فرما د قضيې مطابق $f'(c)=0$ دی •.

د مشتق منځني قيمت قضيه(د لاګرانژ قضيه): که چېرې f تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي او په (a,b) کې مشتق منونکې وي، c په (a,b) انټروال کې موجود دی داسې چې:

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

يعنې

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

ثبوت. $g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x$ مرستندويه تابع په پام کې نيسو ، ليدل کيږي چې:

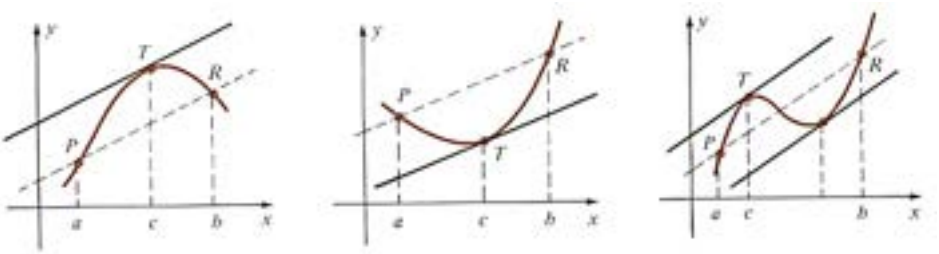
$$g(a)=f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}a=\frac{f(a)b-f(b)a}{b-a}$$

$$g(b)=f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}b=\frac{f(a)b-f(b)a}{b-a}$$

په دې اساس $g(a)=g(b)$ ده، د رولي قضيې په اساس c عدد په (a,b) انټروال کې موجود دی داسې چې $g'(c)=0$ وي، له دې چې

$$g'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\Rightarrow g'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$$

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\Leftrightarrow f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)\ \bullet$$



11.11 شکل

1 **مثال:** $f(x)=x^2$ په پام کې نیسو ، c عدد له $[0\ ,\ 2]$ انټروال څخه داسې ترلاسه کوو چې $f'(c)=\frac{f(2)-f(0)}{2-0}$ صدق وکړي.

حل : دا چې $f'(x)=2x$ دی، نو $f'(c)=2c$ کېږي، نو c عدد په لاندې توګه ټاکل کېږي:

$$f'(c)=\frac{f(2)-f(0)}{2-0}\Rightarrow 2c=\frac{2^2-0^2}{2-0}\Rightarrow 2c=\frac{4}{2}\Rightarrow 2c=2\Rightarrow c=1$$

2**مثال:** $f(x)=x^3-8x-5$ تابع په پام کې نیسو ، c عدد له $[4\ ,\ 1]$ انټروال څخه ترلاسه کوو داسې چې $f'(c)=\frac{f(4)-f(1)}{4-1}$ صدق وکړي.

حل : له دې چې $f'(x)=3x^2-8$ دی ، نو $f'(c)=3c^2-8$ شي، په دې اساس c عدد په لاندې توګه ټاکل کیږي:

$$f'(c)=\frac{f(4)-f(1)}{4-1}\Rightarrow 3c^2-8=\frac{(4^2-8\cdot 4-5)-(1^2-8\cdot -5)}{4-1}$$

$$\Rightarrow 3c^2-8=\frac{39}{3}\Rightarrow 3c^2-8=13\Rightarrow 3c^2-21=0\Rightarrow c=\pm\sqrt{7}$$

په دې اساس $c_1=\sqrt{7}$ او $c_2=-\sqrt{7}$ اعداد د راکړل شوې تابع منځنۍ قیمت قضیه کې صدق کوي.

د کوشي قضیه(د منځنۍ قیمت قضیې تعمیم) : فرضوو چې $f(x)$,$g(x)$ توابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي، په (a,b) کې مشتق منونکي او $g'(x)\neq 0$ وي، نو له (a,b) څخه c عدد داسې موجود دی چې:

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}}$$

ثبوت: بیاهم $F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g(x)$ مرستندویه تابع ټاکو ، لیدل کیږي چې:

$$F(a)=f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g(a)=\frac{f(a)g(b)-f(b)g(a)}{g(b)-g(a)}$$

$$F(b)=f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(b)}g(b)=\frac{f(a)g(b)-f(b)g(a)}{g(b)-g(a)}$$

نو $F(a)=F(b)$ ده، د رولي قضيې شرط د $F(x)$ لپاره صدق کوي او په دې اساس له (a,b) انتروال څخه c عدد داسې موجود دی چې:

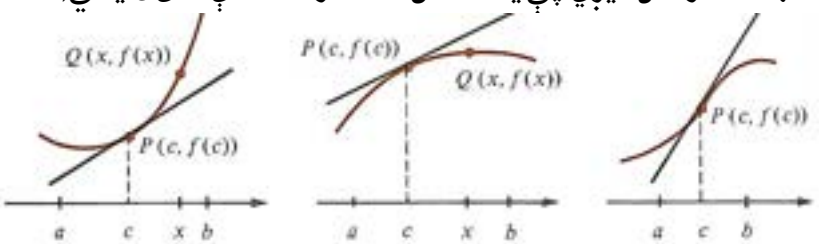
$$F'(c)=0 \Rightarrow f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{f(b)-g(a)}g'(c)=0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad \bullet$$

11.3 دويم مشتق او د ګراف انحنا

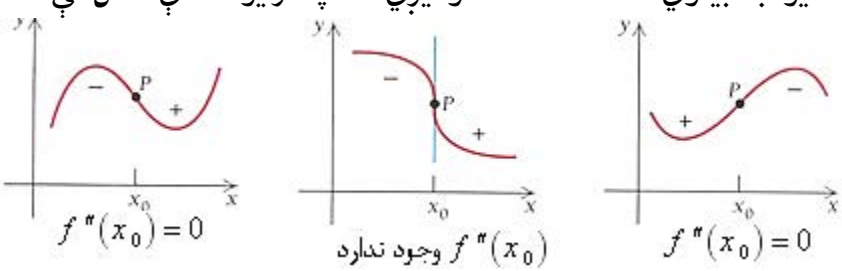
د تابع دويم مشتق د اعظمي او اصغري نقطو په ترلاسه کولو، محدب والي او مقعر والي په ټاکلو او د انعطاف نقطې په تشخيص کې مهم رول لري او لاندې يې مطالعه کوو.

د ګراف محدب والی او مقعر والی: که چېرې f تابع په c عدد کې مشتق منونکې وي، په $P\big(c\ ,f\ (c)\big)$ نقطه کې د f ګراف محدب ګڼل کيږي، مشروط په دې چې (a,b) انتروال چې c په بر کې ولري داسې موجود وي چې مماس په P نقطه کې د ګراف له پاسه واقع شي. دغه منحني هغه مهال مقعر ګڼل کيږي چې يا د مماس د f ګراف لاندې ځای ونيسي(11.12 شکل).



11.12 شکل

انعطاف: هغه نقطه چې د تابع ګراف اړوند د تحدب(محدب والي) او تقعر(مقعر والي) انتروالونه له يوه بله بيلوي، د انعطاف نقطه نوميږي. لکه په هر يوه لاندې شکل کې P نقطه.



11.13 شکل

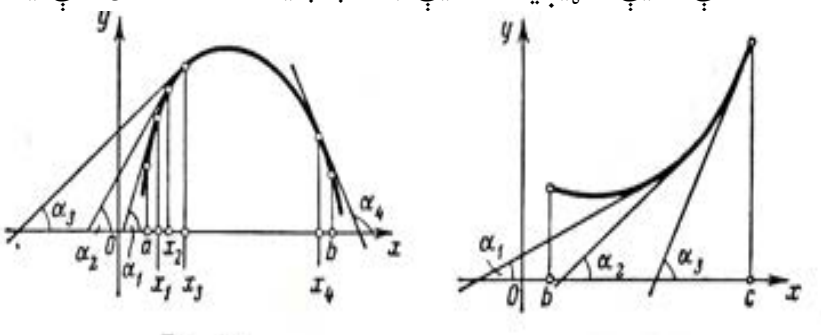
په (11.13 شکل) کې د تابع ګراف په $(-\infty\ ,b)$ انتروال کې محدب، په $(b\ ,d)$ کې مقعر او په $(d\ ,\infty)$ محدب دی. يا د ګراف په G او H کې انعطاف لري.

قضيه (د محدب والي او مقعر والي اړين شرايط): که چېرې f تابع په يوه انتروال کې چې c په بر کې ولري مشتق منونکې او $f''(c)$ موجود وي نو:

(1) که $f''(c)>0$ وي، د f ګراف په $P(c, f(c))$ کې مقعر دی.

(2) که $f''(c)<0$ وي، د f ګراف په $P(c, f(c))$ کې محدب دی.

ثبوت. د محدب او مقعر ګرافونو په نقطو د مترادف مماسونو له ترسیم څخه د افقي محور پرمخ متزایدې او متناقصې زاویې جوړیږي، د قضیې ثبوت په پایله (**11.14** شکل) کې لیدل کیږي چې:



11.14 شکل

د محدب والي په صورت کې د مماس میل یعنې $f'(x)$ متناقص دی، نو ځکه د تابع د مشتق، مشتق یعنې $f''(x)$ باید منفي وي او بالعکس. په همدې توګه د ګراف مقعر والي په صورت کې دویم مشتق مثبت دی.

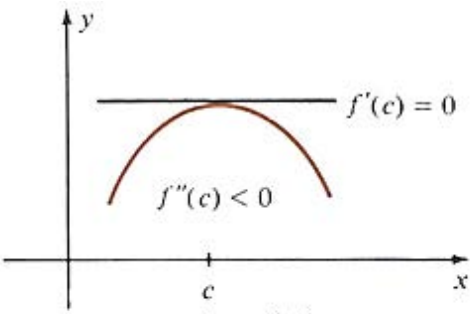
د دویم مشتق په کارونې سره د اکستریم کافي شرط: که چېرې f تابع په یوه خلاص انتروال کې چې c په بر کې لري، مشتق منونکې وي او $f'(c)=0$ شي نو:

(1) که $f''(c)<0$ وي، f په c کې موضعي اعظمي لري،

(1) که $f''(c)>0$ وي، f په c کې موضعي اصغري لري.

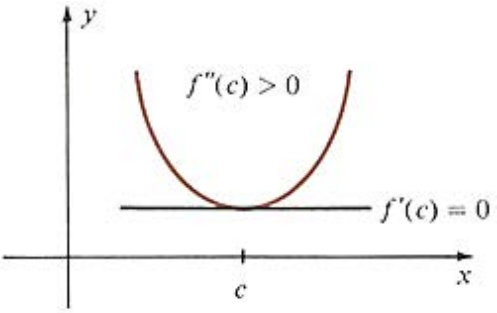
ثبوت: (1) $f''(c)<0$ شرط ښیي چې ګراف په $(c,f(c))$ کې محدب دی او له دې چې $f'(c)=0$ دی، نو په $(c,f(c))$ کې مماس افقي دی، په دې اساس f په c کې موضعي اعظمي لري(11.15 شکل).

(2) $f''(c)>0$ شرط ښیي چې ګراف په $(c,f(c))$ کې محدب دی او له دې چې $f'(c)=0$ دی، نو په $(c,f(c))$ کې مماس افقي دی، په دې اساس f په c کې موضعي اصغري لري. (11.16 شکل) •



اعظمی موضعی

11.15 شکل



اصغری موضعی

11.16 شکل

قضیه: که چېرې f په x_0 کې انعطاف ولري، نو $f''(x_0)=0$ یا $f''(x_0)$ موجود نه دي.

د اعظمي موجودیت

x	$x<c$	c	$x>c$
$f''(x)$	−	−	−
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	مقعر متزاید	اعظمي	مقعر متناقص

د اصغري موجودیت

x	$x<c$	c	$x>c$.
$f''(x)$	+	+	+
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	محدب متناقص	اصغری	محدب متزاید

1 **مثال:** هغه انتروالونه مشخص کړئ چې پکې د $y=x^3+9x^2-6x+1$ تابع ګراف محدب او یا مقعر وي.

حل:

$$y'=3x^2+18x-6 \Rightarrow y''=6x+18$$
$$y''<0 \Rightarrow 6x+18<0 \Rightarrow x<-3$$
$$y''>0 \Rightarrow 6x+18>0 \Rightarrow x>-3$$

لیدل کیږي چې په $(-\infty\ ,\ -3)$ انتروال کې دویم مشتق منفي او په $(-3\ ,\ +\infty)$ کې مثبت دی، نو ځکه ګراف په لومړي انتروال کې محدب او په دویم کې مقعر دی(11.17 شکل).

x	$x<-3$	-3	$x>-3$
y''	−	0	+
گراف	محدب	انعطاف	مقعر

2 **مثال:** د $y = e^{-x^2}$ تابع بحراني او انعطاف نقطې وټاکئ او ګراف يې رسم کړئ.

حل:

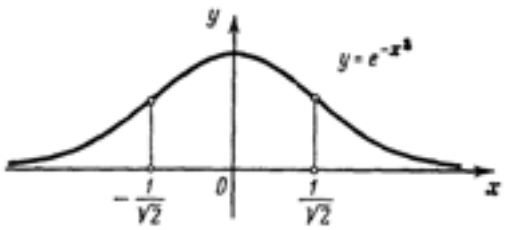
$$y' = -2xe^{-x^2} \Rightarrow y'' = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2}$$

نو ځکه

$$y' = 0 \Rightarrow -2xe^{-x^2} = 0 \Rightarrow x = 0.$$

$$y'' = 0 \Rightarrow 4x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 = \tfrac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\tfrac{1}{\sqrt{2}}.$$

x		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	
y''	+	0	−	−	−	0	+
y'	+	+	+	0	−	−	−
د ګراف انحنا	مقعر	انعطاف	محدب	محدب	محدب	انعطاف	مقعر
د ګراف ډولونه	متزايد	متزايد	متزايد	اعظمي	متناقص	متناقص	متناقص



11.17 شکل

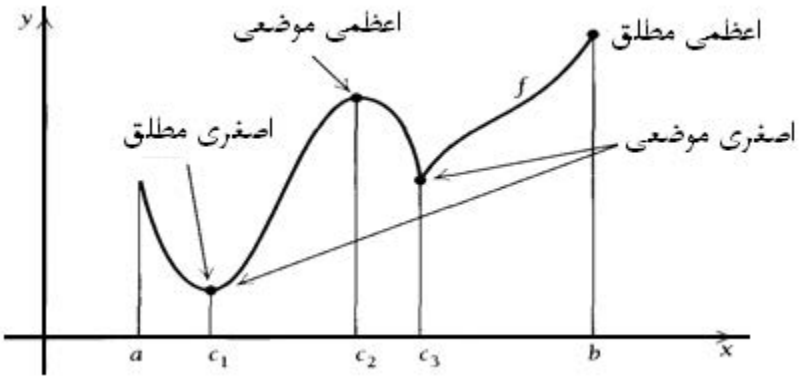
11.4 مطلق اعظمي او اصغري قيمتونه

يو موضعي اصغري قيمت په عمومي توګه ممکن مطلق حالت نلري يعنې تر ټولو اصغري قيمتونو وړوکی نه وي او ممکن اعظمي قيمت په خپل تعريف ناحيه کې تر ټولو لوړ قيمت ونلري.

مطلق اعظمي او اصغري

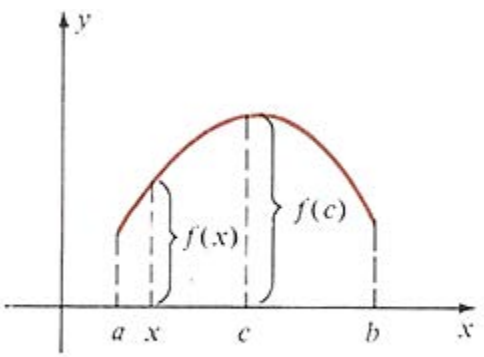
که چېرې f تابع؛ D د تعريف ناحيه ولري. ويل کيږي چې f د D پرمخ په c نقطه کې يو مطلق اعظمي لري، که چېرې په D کې د هر x لپاره $f(x) \le f(c)$ شي او $f(c) = \max_{x \in D} f(x) = M$ په D کې د f اعظمي قيمت نومېږي(11.18 شکل). په ورته ډول f د D پرمخ په c نقطه کې يو مطلق اصغري لري، که چېرې په D کې د هر x لپاره $f(x) \ge f(c)$ شي او $f(c) = \min_{x \in D} f(x) = m$ په D کې د f اصغري قيمت نومېږي. د f اعظمي او اصغري قيمتونه د مطلق اکستريم قيمتونو په نامه هم يادېږي.

(c, M) او (c, m) نقطې په ترتیب د $y = f(x)$ ګراف پرمخ ترټولو لوړه او ترټولو ټیټه نقطه ده.

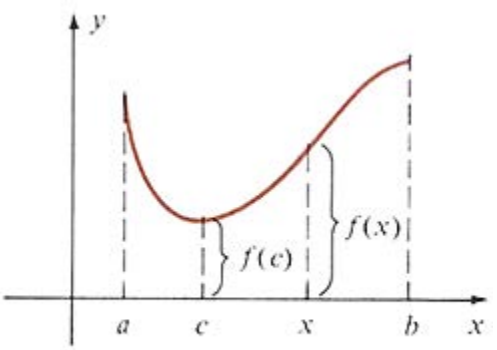


11.18 شکل

قضیه: متمادي تابع په $[a, b]$ ترلې انټروال کې اعظمي او اصغري قیمتونه لري، یعنې x_1 او x_2 اعداد په $[a, b]$ کې موجود دي داسې چې $f(x_1) = m$ ، $f(x_2) = M$ وي، او له $[a, b]$ څخه د هر x لپاره $m \le f(x) \le M$ شرط صدق کوي. لاندې شکلونه پاسینۍ قضیه توضیح کوي.



11.20 شکل



11.19 شکل

د مطلق اعظمي او اصغري نقطو ټاکل: ممکن یوه تابع په یو انټروال کې څو موضعي اعظمي او اصغري نقطې ولري، خو په یوه انټروال کې یوه تابع یوازې یوه مطلق اعظمي او مطلق اصغري نقطه لري. په $[a, b]$ انټروال کې د f متمادي تابع مطلق اعظمي او مطلق اصغري د ټاکلو په موخه لاندې قواعد تعقیبوو:

1. د f تابع بحراني نقطې ټاکو.
2. د $f(c)$ قیمتونه داسې حال کې چې c د f بحراني نقطه وي؛ شمېرو.

3. $f(a)$ او $f(b)$ قيمتونه شمېرو.
4. په 1 او 2 پړاونو کې تر ټولو ستر او تر ټولو کوچني شمېرل شوي اعداد په ترتيب سره د f تابع مطلق اعظمي او مطلق اصغري دي (11.19 شکل) او (11.20 شکل).

1مثال: د $f(x)=x^3-12x$ تابع مطلق اعظمي او مطلق اصغري قيمتونه په $[-3\ ,\ 5]$ انټروال کې ترلاسه کړئ او اړونده ګراف يې په همدې انټروال کې رسم کړئ.

حل: په لومړي سر کې له تابع څخه مشتق نيسو، څو بحراني نقطې يې وټاکل شي:

$$f'(x)=3x^2-12=3(x^2-4)=3(x-2)(x+2)$$

$$f'(x)=0\Rightarrow 3(x-2)(x+2)\Rightarrow x_1=2\ ,x_2=-2$$

ليدل کيږي چې 2 او -2 بحراني نقطې دي.

په دويم ګام کې د تابع قيمتونه په بحراني نقطو او د انټروالونو په انجامونو کې شمېرو:

$$f(-2)=(-2)^3-12(-2)=-8+24=16$$

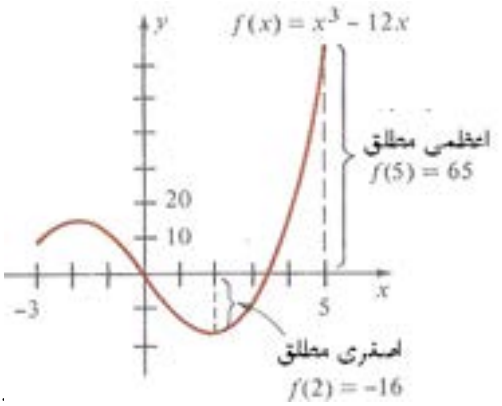
$$f(2)=2^3-12\cdot 2=8-24=-16$$

$$f(-3)=(-3)^3-12(-3)=-27+36=9$$

$$f(5)=5^3-12\cdot 5=125+60=65$$

بالآخره: $\max\limits_{[-3,5]} f(x)=65=f(5)$, $\min\limits_{[-3,5]} f(x)=-16=f(2)$

ليدل کيږي چې $(16\ ,\ -2)$ نقطه د تابع موضعي اصغري ده (11.21 شکل).



11.21 شکل

11.5 تطبيقي مسائل

په طبيعي علومو او رياضي کې په ټاکلو ناحيو کې د توابعو تر ټولو ستر او تر ټولو کوچني قيمت ترلاسه کول مهمه او تطبيقي مساله ده. د جيوديزي خطونو ټاکل، وارياسيون شمېرنې، د صنعت

بهينه جوړونې مسائل او د اسې نور د اعظمي او اصغري مفاهيمو په مټ مطرح کيږي، په دې اساس څو لاندې بېلګې څېړو.

1مثال: دوه مثبت اعداد ترلاسه کړئ چې مجموع يې 20 او ضرب حاصل يې تر ټولو ستر ممکن عدد وي.

حل: فرض کوو چې يو له غوښتل شوو اعدادو څخه x او دويم يې $20-x$ وي، نو ځکه د يوې تابع په توګه يې ضرب حاصل عبارت دی له $f(x)=x(20-x)$ څخه.

دلته x عدد په $[0,20]$ انتروال کې بدلون مومي. نو ځکه د تابع مطلق اعظمي په $[0,20]$ انتروال کې لټوو.

$$f(x) = 20x-x^2 \quad , \quad f'(x)=20-2x$$
$$f'(x)=0 \quad \Rightarrow \quad 20-2x=0 \quad \Rightarrow x=10$$

د انتروالونو په انجامونو کې د تابع قيمت

$$f(0)=0 \quad , \quad f(20)=20\cdot 20-20^2=0$$

او د تابع قيمت په بحراني نقطه کې

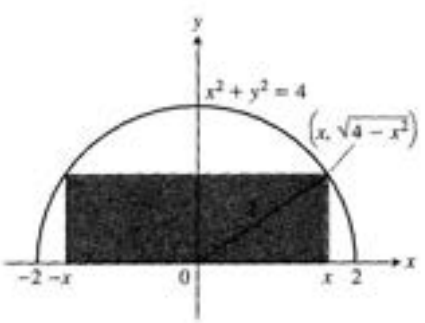
$$f(10) = 20\cdot 10-10^2 = 100$$

ليدل کيږي چې $(10\ ,\ 100)$ د تابع اعظمي نقطه ده نو ځکه دوه غوښتل شوي اعداد عبارت دي له $x_1=10, x_2=10$ څخه چې ضرب حاصل يې 100 کيږي •.

2 مثال: د هغه مستطيل ابعاد وټاکئ چې په $r=2$ شعاع لرونکې نيم دايره کې را چاپير وي او اعظمي مساحت ولري.

حل :

د نيم دايرې د ننه $2x$ طول او $\sqrt{4-x^2}$ عرض لرونکی مستطيل په پام کې نيسو چې مساحت يې $g(x)=2x\sqrt{4-x^2}$ وي، د x د بدلون ساحه $[0,2]$ انتروال دی.



11.26 شکل

$$g'(x) = \frac{-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} + 2\sqrt{4-x^2}$$

$$g'(x)=0 \Rightarrow \frac{-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} + 2\sqrt{4-x^2} = 0 \Rightarrow 8-4x^2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

$-\sqrt{2}$ – عدد د x بدلون په ساحه کې پروت نه دی، نو ځکه د تابع قیمتونه په 0 , $\sqrt{2}$ او 2 نقطو کې شمېرو

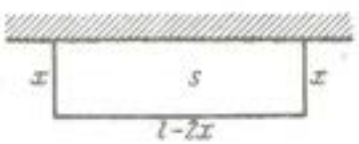
$$g(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}\sqrt{4-2} = 4 \quad , \quad g(2) = 2.2.\sqrt{4-4} = 0$$

$$g(0) = 2.0.\sqrt{4-0} = 0$$

په دې اساس $g(x)$ تابع په $x_0 = \sqrt{2}$ کې اعظمي قیمت لري، نو ځکه د مستطیل طول $2x_0 = 2\sqrt{2}$ او عرض یې $\sqrt{4-x_0^{\,2}} = \sqrt{2}$ دی، داسې حال کې چې د اعظمي مستطیل مساحت $S = g(\sqrt{2}) = (2\sqrt{2})\sqrt{2} = 4$ دی.

3مثال: د وسپنې کتارې تر ټولو وړوکی l طول داسې وټاکئ، چې د یوه دیوال ترڅنګ مستطیل شکله ځمکه له درېو خواوو را چاپیره کړي، داسې چې د مستطیل مساحت $50m^2$ وي.

حل: فرضوو چې د مستطیل عرض x او طول یې $l-2x$ وي(11.27 شکل). په دې اساس د مستطیل مساحت عبارت دی له:



11.27 شکل

$$x(l-2x) = 50 \Rightarrow xl - 2x^2 = 50 \Rightarrow xl = 2x^2 + 50 \Rightarrow l = 2x + \frac{50}{x}$$

د کتارې طول د x متحول تابع(د مستطیل د عرض) په توګه په لاندې ډول دی.

$$l(x) = 2x + \frac{50}{x} \Rightarrow l'(x) = 2 - \frac{50}{x^2} \quad : \quad l'(x) = 0 \Rightarrow 2 - \frac{50}{x^2} = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 50 = 0 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm 5$$

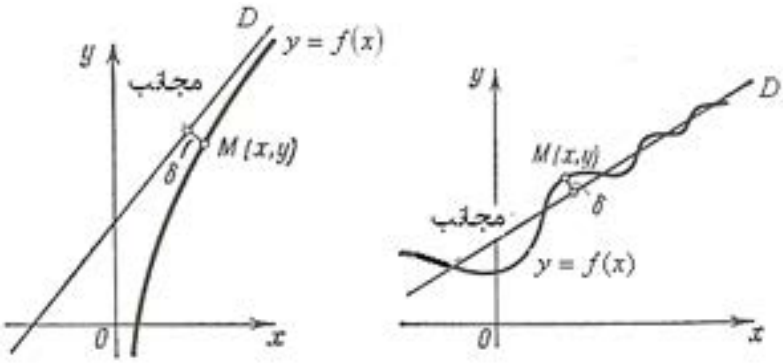
له دې چې x د مستطیل د عرض په توګه یو مثبت عدد دی، نو ځکه -5 په پام کې نه نیول کیږي او $x = 5$ د غوښتل شوي مستطیل عرض دی. یعنې

$$l(x)=2x+\frac{50}{x} \quad \Rightarrow \quad l(5)=2\cdot 5+\frac{50}{5}=10+10=20$$

نو د غوښتل شوې کتارې طول عبارت دی له $20m$ څخه، د مستطیل طول $10m$ او عرض یې $5m$ باید وي.

11.6 د توابعو د ګراف مجانبونه

D مستقیم خط د $y=f(x)$ منحني مجانب ګڼل کیږي، که چېرې δ (د D او د دې منحني (x,y) متحولې نقطې ترمنځ واټن) صفر لور ته تقرب وکړي، داسې حال کې چې لږ تر لږه یو له (x,y) مختصاتو څخه لایتناهي ته تقرب وکړي، مجانب د یوې تابع ګراف او یا د یوې معادلې منحني پورې اړوند دی(11.22 شکل).

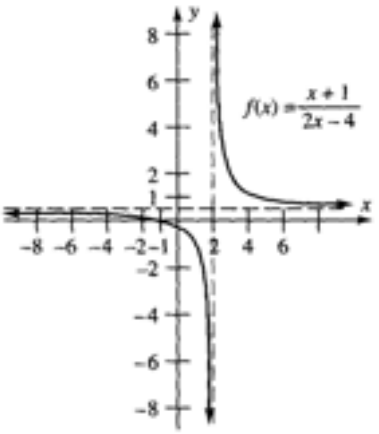


11.22 شکل

عمودي مجانب : $x=c$ مستقیم خط د $y=f(x)$ منحني عمودي مجانب دی که چېرې $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\pm\infty$. وي.

په الجبري توابعو کې د مخرج جذرونه د ګراف عمودي مجانبونه ګڼل کیږي.

مثال: 1 د $f(x)=\dfrac{x+1}{2x-4}$ عمودي مجانب عبارت دي له $x=2$ څخه، ځکه چې $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x+1}{2x-4}=\infty$ او $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x+1}{2x-4}=-\infty$ کیږي(19 شکل).



11.23 شکل

2 **مثال:** د $g(x)=e^{1/x}$ عمودي مجانب $x=0$ مستقيم دی. ځکه چې $\lim_{x\to 0} e^{1/x}=\infty$ کيږي.

مايل مجانب: $y=ax+b$ مستقيم ته د $y=f(x)$ تابع د ښي لور مايل مجانب وايي، که $\lim_{x\to\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$ وي، که چيرې $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$ وي، مايل مجانب له کين لوري څخه دی. په حقيقت کې د تابع او مجانب مستقيم قيمتونه په نهايي حالت کې تقريبا له يوه بل سره مساوي دي.

قضيه: که چيرې $y=ax+b$ د $y=f(x)$ منحني (د ښي لور) مايل مجانب وي، نو

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} \quad , \quad b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-ax].$$

ثبوت: له دې چې $y=ax+b$ د $y=f(x)$ منحني مايل مجانب دی، د تعريف سره سم:

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-(ax+b)] \;=\; 0$$

په وروستۍ اړيکه کې x مشترک نيسو لرو چې:

$$\lim_{x\to\infty} x\left[\frac{f(x)}{x}-a-\frac{b}{x}\right]=0$$

له دې چې $x\to\infty$ موجود دی نو بايد چې:

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-a-\frac{b}{x}\right]=0\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-a\right]-\lim_{x\to\infty}\frac{b}{x}=0$$

په دې اساس

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-a\right]=0$$

په پايله کې

$$\boxed{a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}}$$

ضمنا: $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-ax\right]-b=0$

يعنې: $$\boxed{b=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-ax\right]}$$

عين قضيه د کينې لور په مجانب کې هم صدق کوي. د يوه تابع ګراف په هر يوه ښي او يا کينې لور کې له يوه مايل مجانب څخه ډېر نشي درلودلی. [9].

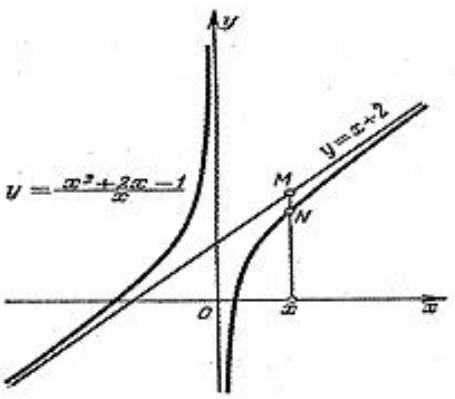
يادونه: په عمومي توګه تابع ته په کتو د مايل مجانب معادله له پاسينۍ قضيې څخه ټاکلی شو، په نسبتي توابعو کې که چېرې د صورت درجه د مخرج له درجې څخه يو واحد ډېره وي، خارج قسمت، يوه خطي تابع ده، چې د مايل مجانب معادله ترې ترلاسه کيږي.

3 مثال: د $y=\dfrac{x^2+2x-1}{x}$ منحني مجانبونه وټاکئ.

حل: مايل مجانب لټوو:

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+1}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=1$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-x)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-1}{x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right)\Rightarrow b=2.$$



11.24 شکل

په دې اساس $y=x+2$ مايل مجانب دی. او له دې چې $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2+2x-1}{x}=\infty$ دی، نو $x=0$ مستقيم(عمودي محور) د ياد منحني عمودي مجانب دی.(11.24 شکل).

4 **مثال:** د $f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$ ګراف مجانبونه وټاکئ.

حل. ښکاره ده چې $x=\pm 1$ د دې منحني دوه عمودي مجانبونه دي، مایل مجانبونه یې په لاندې توګه ټاکل کیږي:

$$a=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}}$$

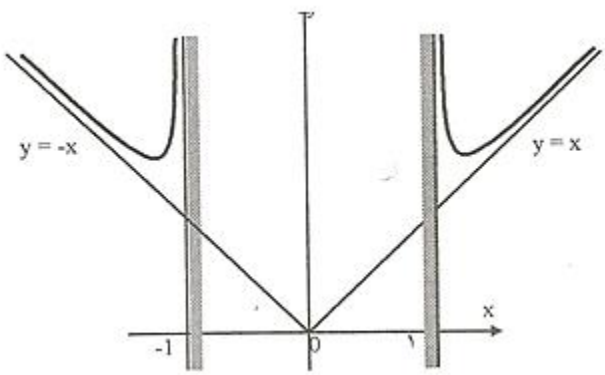
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{|x|}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=(\pm 1)1=\pm 1\Rightarrow a=\pm 1$$

ضمنا

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-x\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\left(x^2-x\sqrt{x^2-1}\right)\left(x^2+x\sqrt{x^2-1}\right)}{\sqrt{x^2-1}\left(x^2+x\sqrt{x^2-1}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^4-x^2(x^2-1)}{\sqrt{x^2-1}\left(x^2+x\sqrt{x^2-1}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}\left(x^2+x\sqrt{x^2-1}\right)}=0\Rightarrow b=0$$

په دې اساس $y=\pm x$ د غوښتل شوي ګراف د ښي او کیڼ لور دوه مایل مجانبونه دي(11.25 شکل).



11.25 شکل

5 **مثال:** د $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ هایپربولا مجانبونه وټاکئ.

حل. پاسینۍ معادله په دوو تابع ګانو په لاندې توګه تقسیم کوو:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\Rightarrow\frac{y^2}{b^2}=\frac{x^2-a^2}{a^2}\Rightarrow y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$

اوس په اجمالي توګه د مایل مجانبونو معادلې په $y=kx+c$ فرضي شکل کې لټول کیږي.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\pm\frac{b\sqrt{x^2\left(1-\frac{a^2}{x^2}\right)}}{ax}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\pm\frac{bx\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}}{ax}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\pm\frac{b\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}}{a}\right)=\pm\frac{b}{a}$$

$$c=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\infty}\left[\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}-\left(\pm\frac{b}{a}x\right)\right]$$

$$=\pm\frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-a^2}-x\right)=\pm\frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-a^2}-x\right)\left(\sqrt{x^2-a^2}+x\right)}{\sqrt{x^2-a^2}+x}$$

$$=\pm\frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-a^2-x^2}{\sqrt{x^2-a^2}+x}=\pm\frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}\frac{-a^2}{\sqrt{x^2-a^2}+x}=0$$

نو $y=\pm\frac{b}{a}x$ مستقيمونه د هايپربولا دوه مايل مجانبونه دي.

مجانب افقي : كه چېرې د يوه منحني په $y=ax+b$ مايل مجانب كې، $a=0$ شي، په دې صورت كې $y=b$ مستقيم له افقي محور سره موازي دی او د افقي مجانب په نامه يادېږي. نو ويلی شو چې يوه منحني کېدای شي مايل او يا افقي مجانب ولري، يعنې افقي مجانب د مايل مجانب ځانګړی حالت دی.

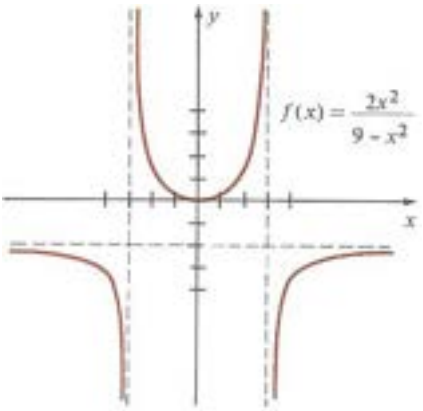
كه څه هم افقي مجانب په عمومي توګه د مايل مجانب څخه په آسانۍ ترلاسه کيږي، خو دا شان مجانبونه په نسبتي توابعو کې هغه مهال موجود دي چې د صورت او مخرج درجې له يوه بل سره مساوي وي او له $b=\lim_{x\to\infty}f(x)$ اړيکې څخه $x=b$ د افقي مجانب معادله ښيي، افقي مجانب د صورت او مخرج له حاصل تقسيم څخه هم ترلاسه کيږي.

مثال: د $f(x)=\frac{2x^2}{9-x^2}$ 6 تابع مجانبونه وټاکئ.

حل: د مخرج جذرونه 3 او 3– اعداد دي، نو ځکه $x=3$ او $x=-3$ مستقيمونه عمودي مجانبونه دي او

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2}{9-x^2}=-2$$

په دې اساس $y=-2$ د يادې منحني افقي مجانب دی، عمودي مجانبونه مستوي په دريو سيمو ويشي، چې د ګراف د دريو سيمو ځای ټاکلو تر ټولو آسانه نقطې عبارت دي له $(-4,-\frac{32}{7})$ ، $(0,0)$ او $(4,-\frac{32}{7})$ څخه(21 شکل).



11.23 شکل

11.7 د ليمت په شپږنو کې د مشتق کارونې (د هوپيتال قاعده)

که چېرې $f(x)$ او $g(x)$ توابع په $(a\ ,\ b)$ انتروال کې چې c عدد په بر کې لري، د مشتق منونکي وي(ولو که په c کې مشتق منونکي هم نه وي). که د $x \neq c$ لپاره $g'(x) \neq 0$ وي او $\frac{f(x)}{g(x)}$ په $x = c$ کې $\frac{0}{0}$ يا $\frac{\infty}{\infty}$ حالتونه ولري، نو

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

ثبوت: د $f(x)$ او $g(x)$ توابعو لپاره که $\frac{f(x)}{g(x)}$ په $x = c$ کې $\frac{0}{0}$ حالت غوره کړي ، په $[x, c]$ انتروال کې د کوشي قضيه تطبيق کوو ، $z \in (x, c)$ عدد موجوديت اړين دي داسې چې:

$$\frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} = \frac{f'(z)}{g'(z)} \Rightarrow \frac{f(x) - 0}{g(x) - 0} = \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

په دې اساس :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

له دې چې $x < z < c$ دی، کله چې $x \to c$ وکړي، نو z عدد هم c ته تقرب کوي، نو ځکه

$$\lim_{x \to c^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c^-} \frac{f'(z)}{g'(z)} = \lim_{z \to c^-} \frac{f'(z)}{g'(z)} = \lim_{x \to c^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

په همدې طريقه د ښي لور ليمت په $[c, x]$ انتروال کې ثبوت کيږي.

په همدې توګه که $\frac{f(x)}{g(x)}$ په $x = c$ کې $\frac{\infty}{\infty}$ حالت ولري.

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}} = \lim_{x \to c} \frac{-g'(x)}{-f'(x)} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)^2$$

يعنې

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{g'(x)}{f'(x)}\left(\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}\right)^2$$

په دې اساس

- $$\left(\lim_{x\to c}\frac{g'(x)}{f'(x)}\right)\left(\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}\right)=1\Rightarrow\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to c}\frac{g'(x)}{f'(x)}}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

مثالونه

1. $$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+2x-1}{3x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x+2}{3}=\frac{2}{3}$$
2. $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{2\sin 2x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{4\cos 2x}=\frac{1}{2}$$
3. $$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\frac{4\tan x}{1+\sec x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\frac{4\sec^2 x}{\sec x\ \tan x}=\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\frac{4\sec x}{\tan x}$$
$$=\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\frac{\frac{4}{\cos x}}{\frac{\sin x}{\cos x}}=\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\frac{4}{\sin x}=4$$
4. $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin 2x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2\cos 2x}=\frac{1}{2}$$
5. $$\lim_{x\to 1}\frac{1-x+\ln x}{1+\cos(\pi x)}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{-1+\frac{1}{x}}{-\pi\sin(\pi x)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\pi x\sin(\pi x)}$$
$$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{1}{\pi\sin(\pi x)+\pi^2 x\cos(\pi x)}=-\frac{1}{\pi^2}$$

پايله: که چېرې f, g توابع د x کافي سترو قيمتونو لپاره مشتق منونکي وي $x\to c$ په $x\to\infty$ يا $x\to-\infty$ تعويض کيږي او د هوپيتال قاعده پرې تطبيق کېدای شي، يعنې که $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ ليمت، $\frac{0}{0}$ يا $\frac{\infty}{\infty}$ حالتونه غوره کړي، نو

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

ثبوت. د $x=\frac{1}{y}$ ، په تعويض سره لرو چې

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{y\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{y}\right)}{g\left(\frac{1}{y}\right)}=\lim_{y\to 0}\frac{f'_y\left(\frac{1}{y}\right)y^{-2}}{g'_y\left(\frac{1}{y}\right)y^{-2}}=\lim_{y\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{y}\right)}{g'\left(\frac{1}{y}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

مثالونه

6. $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{1+2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2}=\infty$

7. $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$

8. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2}{e^x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x+2}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{6}{e^x}=0$

9. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{2^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{nx^{n-1}}{2^x\ln 2}=\lim_{x\to\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{2^x(\ln 2)^2}=\cdots=\lim_{x\to\infty}\frac{n!}{2^x(\ln 2)^n}=0$

10. $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^n}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{nx^{n-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{n(n-1)x^{n-2}}=\cdots=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{n1}=\infty$

پايله: د $P(x)$ پولينوم لپاره لرو چې

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{e^x}=0 \quad , \quad \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{P(x)}=\infty$$

استثنايي حالتونه: داسې موارد هم شته چې پکې هوپيتال قاعده يوازې په مستقيم ډول ګټوره وي او يا ممکن دی، د دې ميتود تطبيق هيڅ موثر نه وي 12 او 13 مثالونو ته پام وکړئ.

11 **مثال:** د $\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\sin 4x}{x^3\cos x}$ په شمېرلو کې چې $\frac{0}{0}$ حالت لري، د هوپيتال قاعدې مستقيم تطبيق ګټور نه دی، اما کولی شو يادليمت د دريو ليمتونو د ضرب حاصل په توګه په پام کې ونيسو او هوپيتال قاعدې په لاندې توګه پرې تطبيق کړو.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\sin 4x}{x^3\cos x}=\left[\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\right]\left[\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}\right]\left[\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\right]$$
$$=\left[\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}\right]\left[\lim_{x\to 0}\frac{4\cos 4x}{1}\right]\left[\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\right]=\left(\frac{1}{2}\right)(4)(1)=2$$

12 **مثال:** د $\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}$ ليمت شمېرل غوښتل شوي.

حل. دغه ليمت $\frac{\infty}{\infty}$ غير معين شکل لري، که هوپيتال قاعده پرې تطبيق کړو، لرو چې:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{1-\cos x}$$

د وروستۍ اړيکې نسبي خوا افادې ليمت موجود نه دی، ځکه د $\sin x$ او $\cos x$ قيمتونه د -1 او $+1$ اعدادو ترمنځ بدلون مومي، په دې اساس دا شان مواردو کې د هوپيتال قضيه د تطبيق وړ نه ده، خو پاسينی ليمت په ډيره آسانۍ په لاندې توګه شمېرل کيږي:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)}{x\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{\sin x}{x}}{1-\frac{\sin x}{x}} = \frac{1+0}{1-0} = 1$$

13**مثال:** د $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+\sin^2 x}}{x}$ په شمېرلو کې د هوپيتال قضيه ګټوره نه ده، داسې حال کې چې

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+\sin^2 x}}{x} = \lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{\sin^2 x}{x^2}} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

14**مثال:** د هوپيتال قاعدې په مرسته $\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}$ لیمت نه شي شمېرل کېدای، خو

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right) = 1+0 = 1$$

د لیمتونو مبهم حالتونه: د لیمت د شمېرلو پر مهال اوه $\frac{0}{0}$ ، $\frac{\infty}{\infty}$ ، $0.\infty$ ، $\infty-\infty$ ، 0^0 ، ∞^0 او 1^∞ حالتونه منځته راتللی شي، چې پنځه وروستي حالتونه د اړینو بدلونونو وروسته په دوو $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ اوښتلی شي او په دې توګه هوپیتال قاعدې ته ارجاع کیږي.

$0.\infty$ **مبهم حالت:** که چېرې $\lim_{x\to a} f(x)=0$ او $\lim_{x\to a} g(x)=\infty$ وي، د

$$f(x)g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} \quad \text{يا} \quad f(x)g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

په پام کې نیولو سره، کولی شو $\lim_{x\to a}[f(x)g(x)]$ په $\frac{0}{0}$ او یا $\frac{\infty}{\infty}$ حالتونو واړوو.

15**مثال:**

$$\lim_{x\to\infty}[x.arc\cot x] = \lim_{x\to\infty}\frac{arc\cot x}{1/x} = \lim_{x\to\infty}\frac{-1/(1+x^2)}{-1/x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+1} = 1$$

$\infty-\infty$ مبهم حالت: که چېرې $\lim_{x\to a} f(x) = \infty = \lim_{x\to\infty} g(x)$ وي د

$$f(x)-g(x) = \frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}} = \frac{u(x)}{v(x)}$$

په پام کې نیولو سره، $\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to a}\frac{u(x)}{v(x)}$ مفهوم، په $\frac{0}{0}$ حالت اوړي، داسې حال کې چې

$$\lim_{x\to a} u(x) = 0 = \lim_{x\to a} v(x)$$

16**مثال:**

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x+x^2}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{x+x^2-\sin x}{(x+x^2)\sin x}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{1+2x-\cos x}{(1+2x)\sin x+(x+x^2)\cos x}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{2+\sin x}{2\sin x-(x+x^2)\sin x+(2+4x)\cos x} = 1$$

مبهم حالتونه: $\lim_{x\to a}\left(f(x)^{g(x)}\right)$ دوله ليمت ممکن، يو له پاسينيو دريو مبهم حالاتو څخه غوره کړي. پاسيني هر يو حالت د طبيعي لوګارتم په کارولو سره په $0\times\infty$ حالت د اوښتلو وړتيا لري. يعني د $\lim_{x\to a}\left(f(x)^{g(x)}\right)$ د شمېرلو په موخه له 0^0 ، ∞^0 او 1^∞

$$\ln\left(\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}\right)=\lim_{x\to a}\left(\ln f(x)^{g(x)}\right)=\lim_{x\to a}\left(g(x)\ln f(x)\right)$$

څخه کار اخيستل کيږي. په داسې حالاتو کې د رياضي درې مهم مفاهيم(ليمت، مشتق او لوګارتم) په يوه وخت کې تطبيق کيږي.

17**مثال:** (∞^0) حالت د $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$ شمېرل غوښتل شوي.

حل: n عدد د متحول په توګه په پام کې نيسو او لرو چې

$$\ln\left(\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\ln n^{\frac{1}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\ln n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0 \quad\Rightarrow\quad \ln\left(\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\right) = 0 \quad\Rightarrow\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1\bullet$$

په بل عبارت

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=\lim_{n\to\infty}\left(n^{\frac{1}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(e^{\ln n}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(e^{\frac{\ln n}{n}}\right)$$
$$=e^{\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}}=e^{\lim_{n\to\infty}\frac{(\ln n)'}{(n)'}}=e^{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}=e^0=1$$

18**مثال:** (1^∞)حالت. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ عدد وشمېرئ.

حل.

$$\ln\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right] = \lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)^x$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[x\ln\frac{x+1}{x}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\frac{x+1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\ln\frac{x+1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x+1}(-\frac{1}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+1} = 1 \quad \Rightarrow \quad \ln\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right] = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \quad \bullet$$

19 **مثال:** (0^0) حالت د $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2x}\right)^{\frac{1}{x}}$ شمېرل غوښتل شوي.

حل. ليمت 0^0 لري، نو لرو چې

$$\ln\left[\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2x}\right)^{\frac{1}{x}}\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\ln\left(\frac{1}{2x}\right)^{\frac{1}{x}}\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{x}\ln\frac{1}{2x}\right]$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{x}(\ln 1 - \ln 2x)\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{-\ln 2x}{x} = -\lim_{x\to\infty}\frac{\ln 2x}{x} = -\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{2x}}{1} = 0$$

$$\Rightarrow \ln\left[\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2x}\right)^{\frac{1}{x}}\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2x}\right)^{\frac{1}{x}} = 1 \bullet$$

يادونه. ليدل کيږي چې د ځينو نمايي توابعو ليمت د لوګارتم او مشتق په مرسته په ښه توګه شمېرل کيداى شي.

11.8 د څېرکي لنډيز

د تابع تزايد او تناقص: که چېرې f تابع په I انټروال کې تعريف شوې وي او x_1 او x_2 د دې انټروال اعداد وي، نو

(1) f تابع په I انټروال کې متزايد ده؛ که $f(x_1) < f(x_2)$ وي داسې چې $x_1 < x_2$.

(2) f تابع په I انټروال کې متناقص ده؛ که $f(x_1) > f(x_2)$ وي، داسې چې $x_1 < x_2$.

(3) f تابع په I انټروال کې ثابته ده؛ که له I څخه هر x_1 او x_2 ته $f(x_1) = f(x_2)$ وي.

د تزايد او تناقص اړين شرطونه

(1) که چېرې $f(x)$ مشتق منونکې تابع په يوه انټروال کې متزايد وي، مشتق يې په دې انټروال کې هېڅکله منفي نه وي، يعنې $f'(x) \geq 0$.

(2) که چېرې $f(x)$ مشتق منونکې تابع په يوه انتروال کې متناقص وي، د تابع مشتق په دې انتروال کې مثبت نه وي، يعنې $f'(x) \le 0$.

د تزايد او تناقص کافي شرطونه: که چېرې f تابع په $[a\ ,\ b]$ انتروال کې متمادي او په $(a\ ,\ b)$ انتروال کې مشتق منونکې وي:

(1) که له $(a\ ,\ b)$ څخه د هر x لپاره $f'(x) > 0$ وي، نو f په $[a\ ,\ b]$ کې متزايد ده.

(2) که له $(a\ ,\ b)$ څخه د هر x لپاره $f'(x) < 0$ وي، نو f په $[a\ ,\ b]$ کې متناقص ده.

بحراني نقطې: د f تابع تعريف له ناحيې څخه يوه c داخلي نقطه د بحراني نقطې په نامه يادېږي، که د ګراف مماس په $(c\ ,\ f\ (c))$ کې، افقي حالت ولري او يا دا چې مشتق منونکې وي، يعنې $f'(c) = 0$ يا $f'(c)$ موجود نه وي.

موضعي اعظمي او اصغري: که c د f تابع د تعريف له ناحيې څخه يو عدد وي.

(1) $f\ (c)$ د f تابع موضعي اعظمي ده، که چيرې $(a\ ,\ b)$ خلاص انتروال c داسې په ځان کې ولري چې، له $(a\ ,\ b)$ انتروال څخه د هر x لپاره $f\ (x) \le f\ (c)$، يعنې $f\ (c) = \max\limits_{(a,b)} f\ (x)$ او $(c\ ,\ f\ (c))$ موضعي اعظمي نقطې دي.

(2) $f\ (c)$ د f تابع موضعي اعظمي ده، که چيرې $(a\ ,\ b)$ خلاص انتروال c داسې په ځان کې ولري چې، له $(a\ ,\ b)$ انتروال څخه د هر x لپاره $f\ (x) \ge f\ (c)$، يا $f\ (c) = \min\limits_{(a,b)} f\ (x)$ او $(c\ ,\ f\ (c))$ موضعي اعظمي نقطې دي.

د فرما قضيه: که چېرې $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انتروال کې متمادي او د $c \in (a,b)$ لپاره د $f(c)$ قيمت اعظمي يا اصغري وي، نو c يوه بحراني نقطه ده، يعنې $f'(c) = 0$ يا f په $x = c$ کې مشتق منونکې نه ده.

د رولې قضيه: که چېرې $f(x)$ په $[a,b]$ انتروال کې متمادي، په (a,b) کې مشتق منونکې او $f\ (a) = f\ (b)$ وي، نو لږ تر لږه c عدد له (a,b) انتروال څخه داسې موجود دی چې:

$$f'(c) = 0$$

د مشتق منځنې قيمت قضيه(د لاګرانژ قضيه): که چېرې f په $[a,b]$ انتروال کې متمادي او په (a,b) کې مشتق منونکی وي، c عدد له (a,b) انتروال څخه داسې موجود دی چې:

$$f\ (b) - f\ (a) = f'(c)(b-a)$$

د کوشي قضيه(د منځنې قيمت د قضيې تعميم): فرضوو چې $f(x), g(x)$ توابع په $[a,b]$ انتروال کې متمادی، په (a,b) کې مشتق منونکي او $g'(x) \ne 0$ وي، نو له (a,b) څخه c عدد داسې موجود دی چې:

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}}$$

د ګراف محدب او مقعر والی: که f تابع په c کې مشتق منونکې وي. د f ګراف په $P(c, f(c))$ نقطه کې محدب دی، په هغه صورت کې چې (a,b) انتروال c په ځان کې ولري او اړونده مماس پکې د ګراف په سر واقع وي. منحني ته مقعر وایي، که چېرې یاد مماس د f ګراف تر لاندې ځای ونیسي.

انعطاف: هغه نقطه ده چې د تابع ګراف د مقعر والي او محدب والي انتروالونه له یوه بله بېلوي.

د محدب او مقعر والي اړین شرطونه: که چېرې f تابع په یوه داسې انتروال کې چې c په ځان کې ولري مشتق منونکې او $f''(c)$ موجود وي.

(1) که $f''(c) > 0$ وي، f ګراف په $P(c, f(c))$ کې مقعر دی.

(2) که $f''(c) < 0$ وي، f ګراف په $P(c, f(c))$ کې محدب دی.

د دویم مشتق په کارولو سره د اکسترېم کافي شرط: که چېرې f تابع په یوه داسې خلاص انتروال کې چې c په برکې ولري، مشتق منونکې وي او $f'(c) = 0$ شي.

(1) که $f''(c) < 0$ وي، نو f په c کې موضعي اعظمي لري.

(1) که $f''(c) > 0$ وي، نو f تابع په c کې موضعي اصغري لري.

قضیه: که چېرې f تابع په x_0 انعطاف ولري، نو $f''(x_0) = 0$ یا $f''(x_0)$ موجود نه دي.

مطلق اعظمي او اصغري: که تابع په یوه تاکلي انتروال کې څو موضعي اعظمي او څو موضعي اصغري ولري، تر ټولو ستر اعظمي یې د مطلق اعظمي او تر ټولو وړه اصغري یې د مطلق اصغري نقطې په نامه یادېږي.

مطلق اعظمي او اصغري قیمتونه په بحراني نقطو، د انتروالونو دوه انجامونو او هغو نقطو کې چې تابع پکې مشتق منونکې نه وي؛ مطرح کېږي.

د توابعو د ګراف مجانبونه: هغه مستقیم خط دی چې په بینهایت کې په ګراف باندې مماس کېږي.

عمودي مجانب: $x = c$ مستقیم خط د $y = f(x)$ منحني عمودي مجانب دی په هغه صورت کې چې $\lim_{x\to c} f(x) = \pm\infty$. وي.

مایل مجانب: که چېرې $y = ax + b$ د $y = f(x)$ تابع مایل مجانب وي، نو

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \quad , \quad b = \lim_{x\to\infty} [f(x) - ax].$$

افقي مجانب: که د یوه منحني په $y = ax + b$ مایل مجانب کې $a = 0$ شي، په دې صورت کې $y = b$ مستقیم خط یې د افقي مجانب په نامه یادېږي.

هوپيتال قاعده: که $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$ يو له $\frac{0}{0}$ يا $\frac{\infty}{\infty}$ حالاتو څخه ولري، په دې صورت کې

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

هوپيتال قاعده په $c=\infty$ حالت کې هم صدق کوي.

11.9 تمرين

د لاندې توابعو اعظمي، اصغري او انعطاف نقطې د لومړي او دويم مشتق په کارولو سره وټاکئ.

1. $y=x-x^2$, 2. $y=x-x^3$, 3. $y=x^3-147x$

4. $y=x^4-3x+3$, 5. $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1$, 6. $y=x^3-3x+3$

د لاندې توابعو مطلق اعظمي او اصغري نقطې په ورکړل شويو انتروالونو کې وټاکئ.

7. $y=x-x^2,[0,1]$, 8. $y=x-x^3$, $[0,1]$

9. $y=x^3-147x$, $(-\infty,\infty)$, 10. $y=2x$, $[0,3]$

11. $y=\sqrt{x}-x$, $x\geq 0$, 12. $y=\tan x$,$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

د لاندې توابعو د ګراف مجانبونه وټاکئ:

13. $y=1+e^x$, 14. $y=x-\frac{1}{x}$, 15. $y=\frac{x}{2}+\frac{2}{x}$

16. $y=\frac{x+3}{x+2}$, 17. $y=x\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$, 18. $y=\frac{1}{1+x^2}$

19. $y=\sqrt[3]{2ax^2-x^3}$, 20. $y=\frac{x}{x^2-1}$, 21. $y=\frac{x^2+1}{x-1}$

22. د $y=\frac{x}{1+x^2}$ تابع ګراف رسم کړئ.

23. د $y=ax^3+bx^2+cx+d$ ګراف د بحراني او انعطاف نقطو د موجوديت شرايط وښيئ او انعطاف نقطه يې وټاکئ.

لاندې ليمتونه د هوپيتال قاعدې په مرسته وشمېرئ:

24. $\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin 2x}{x-\sin 2x}$, 25. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-x^2}{\sin^2 x-x^2}$, 26. $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

27. $\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos(\pi x)}{x^2-2x+1}$, 28. $\lim_{x\to\infty}\left(x^2e^{-x}\right)$, 29. $\lim_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{\frac{1}{x}}$

30. $\lim_{x\to 0}\left(e^{3x}-5x\right)^{\frac{1}{x}}$, 31. $\lim_{x\to\infty}\left(e^{3x}-5x\right)^{\frac{1}{x}}$, 32. $\lim_{x\to 0^+}\left(x^2\ln x\right)$

33. $\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x}$, 34. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$, 35. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{2ax^2-x^3}+x\right)$

36. $\lim_{x\to\infty}\left(1+e^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$, 37. $\lim_{x\to a}\frac{x^{\alpha}-a^{\alpha}}{y^{\beta}-a^{\beta}}$, 38. $\lim_{x\to\infty}\left(1+x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$

دوولسم څپرکی
انتګرال

انتګرال د معاصر ریاضیاتو یو مهم، پراخ او اصلي مبحث دی چې په فني شمېرنو کې فوق العاده اهمیت لري. انتګرال مفهوم له دوو زاویو څخه مطرح کیږي: لومړی. انتګرال د هغه تابع په توګه چې مشتق یې معلوم وي(غیر معین انتګرال)، دویم: انتګرال د عددي مجموعې لیمت په توګه. دواړه پاسیني مفاهیم د یوې سکې دوو مخونو په شان له یوه بل سره تړلي دي. په دې څپرکي د معین او غیر معین انتګرالونو بنسټیز مفاهیم په لنډ ډول مطرح کیږي.

12.1 د غیر معین انتګرال عمومي مفاهیم

لومړنۍ تابع: F تابع په $[a,b]$ انتروال کې د f لومړنۍ تابع ګڼل کیږي، که چېرې د پاسیني انتروال په ټولو نقطو کې $F'(x)=f(x)$ وي. یعنې $dF(x)=f(x)\,dx$ شي، نو f د F تابع مشتق او F د f لومړنۍ تابع ده.

1 مثال: $F(x)=\frac{1}{3}x^3$ او $G(x)=\frac{1}{3}x^3+9$ توابع د $f(x)=x^2$ تابع دوې لومړنۍ توابع دي، ځکه چې:

$$F'(x)=x^2=f(x)$$
$$G'(x)=x^2=f(x)$$

د لومړنۍ توابعو تعدد: که چېرې F_1 او F_2 په $[a,b]$ انتروال کې د f دوې لومړنۍ توابع وي، نو د دوی ترمنځ توپیر یو ثابت عدد دی.

ثبوت: د لومړنۍ تابع تعریف په پام کې نیولو سره، له $[a,b]$ څخه د هر x لپاره لرو چې:

$$\left.\begin{aligned}F_1'(x)&=f(x)\\F_2'(x)&=f(x)\end{aligned}\right\}$$

$\varphi(x)=F_1(x)-F_2(x)$ تابع په پام کې نیسو، ښکاره ده چې:

$$\varphi'(x)=\left[F_1(x)-F_2(x)\right]'=F_1'(x)-F_2'(x)=f(x)-f(x)=0$$

له دې چې $\varphi'(x)=0$، نو $\varphi(x)$ یو ثابت عدد دی، یعنې

$$F_1(x)-F_2(x)=C \quad \bullet$$

یوه تابع کېدای شي څو لومړنۍ تابع(بینهایت لومړنۍ توابع) ولري، داسې چې د هرې جوړې ترمنځ تفاوت یې یو ثابت عدد وي.

د غیرمعین انتګرال تعریف: که چېرې $F(x)$ د $f(x)$ لومړنۍ تابع وي، $F(x)+C$ افادې ته داسې چې C ثابت عدد دی، د $f(x)$ غیرمعین انتګرال په نامه یادیږي او لیکي چې:

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C$$

دلته $\int$ نښه د انتګرال نښه ده، $f(x)$ د انتګرال لاندې تابع او x د انتګرال متحول دی. په دې اساس

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C \Leftrightarrow F'(x)=f(x)$$

پایله: د غیرمعین انتګرال له تعریف څخه نتیجه اخلو چې

$$i.\quad \frac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx\right)=f(x)$$

$$ii.\quad d\left(\int f(x)\,dx\right)=f(x)\,dx$$

$$iii.\quad \int dF(x)=F(x)+C$$

2 **مثال:** د $f(x)=x^2$ انتګرال عبارت دی له:

$$\int x^2dx=\frac{1}{3}x^3+C$$

د توابعو انتګرال نیونه: د بسیط توابعو انتګرال کولی شو د مشتقونو له فهرست کولو څخه یې درک کړو، اما په عمومي توګه د ټپلابټپلو او مرکب توابعو ترلاسه کولو لپاره ټپلابټپلې او ځانګړې طریقې موجودې دي.

د غیر معین انتګرال لومړنۍ ځانګړتیاوې: د C او k ثابت اعدادو لپاره لرو چې

$$i.\quad \int 0\,dx = C$$

$$ii.\quad \int k\,dx = kx + C$$

$$iii.\quad \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\quad n\neq -1$$

$$iv.\quad \int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$$

$$v.\quad \int\left[f(x)\pm g(x)\right]dx=\int f(x)\,dx\pm\int g(x)\,dx$$

مثالونه: اوس کولی شو د ځینو بسیط توابعو انتګرال وشمېرو، څو لاندینۍ ټپلګې په پام کې نیسو:

3. $\int(ax^2+bx+c)\,dx=\int ax^2dx+\int bxdx+\int cdx$

$=a\int x^2dx+b\int xdx+c\int dx=\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx+C$

4. $\int x^4 dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + C = \frac{x^5}{5} + C = \frac{1}{5}x^5 + C$

5. $\int 5t^7 dt = 5\int t^7 dt = 5 \cdot \frac{t^8}{8} + C = \frac{5}{8}t^8 + C$

6. $\int \left(4x^3 + 2x - 1\right) dx = \int 4x^3 dx + \int 2x dx - \int dx = 4\int x^3 dx + 2\int x dx - \int dx$

$$= \frac{4x^4}{4} + \frac{2x^2}{2} - x + C = x^4 + x^2 - x + C$$

7. $\int \frac{3\,dx}{x^2} = \int 3x^{-2} dx = \frac{3x^{-2+1}}{-2+1} + C = -3x^{-1} + C = -\frac{3}{x} + C$

8. $\int 5\sqrt[3]{u^2} du = 5\int u^{\frac{2}{3}} du = 5\frac{u^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + C = 5\frac{u^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + C = 3u^{\frac{5}{3}} + C$

9. $\int \frac{x^3 - 3}{x^2} dx = \int \left(\frac{x^3}{x^2} - \frac{3}{x^2}\right) dx = \int \left(x - 3x^{-2}\right) dx = \frac{1}{2}x^2 + 3x^{-1} + C$

10. $\int \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}} - 6\sqrt{x}\right) dx = \int \left(2x^{-\frac{1}{3}} - 6x^{\frac{1}{2}}\right) dx = 2\frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} - 6\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C$

$$= 3x^{\frac{2}{3}} - 4x^{\frac{3}{2}} + C$$

12.2 د اساسي انتگرالونو جدول

د توابعو مشتقونو لـه مخې(د 10څېرکي وروستۍ برخـه) د ځينـو اساسـي توابعـو انتـگرال د انتگرال نيونې لومړنۍ مرجع په توګه په اړونده ساده شکلونو کې يې په لاندې توګه کولی شو فهرست کړو:

$I.\ \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, (\alpha \neq -1)$, $II.\ \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, x \neq 0$

$III.\ \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, (a > 0, a \neq 0)$, $IV.\ \int e^x dx = e^x + C$

$V.\ \int \sin x\, dx = -\cos x + C$, $VI.\ \int \cos x\, dx = \sin x + C$

$VII.\ \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$, $VIII.\ \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$

$IX.\ \int \tan x\, dx = -\ln|\cos x| + C$, $X.\ \int \cot x\, dx = \ln|\sin x| + C$

$XI.\ \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$, $XII.\ \int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \arctan x + C \\ -\operatorname{arccot} x + C \end{cases}$

$$XIII.\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + C\ ,\ XIV.\ \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$$

$$XV.\ \int \cosh x = \sinh x + C\ ,\ XVI.\ \int \sinh x = \cosh x + C$$

$$XVII.\ \int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\coth x + C\ ,\ XVIII.\ \int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x + C$$

د پاسینیو اړیکو ثبوت لپاره، کولی شو د اړونده اړیکې ښي لورې له مشتق نیونې څخه، په کې خواکې د انتګرال لاندې تابع ترلاسه کړو. دلته د بېلګې په توګه IX ، X ، XIII او XIV اړیکې په لاندې ډول ثبوت کیږي.

$$XI.\ \left(-\ln|\cos x|\right)' = -\left(\ln|\cos x|\right)' = -\frac{(\cos x)'}{\cos x} = -\frac{-\sin x}{\cos x} = \tan x$$

$$X.\ \left(\ln|\sin x|\right)' = \frac{(\sin x)'}{\sin x} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

$$XIII.\ \left(\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right|\right)' = \frac{\left(x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right)'}{x + \sqrt{x^2 \pm 1}} = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm 1}}}{x + \sqrt{x^2 \pm 1}} = \frac{\frac{\sqrt{x^2 \pm 1} + x}{\sqrt{x^2 \pm 1}}}{x + \sqrt{x^2 \pm 1}}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2 \pm 1} + x}{\sqrt{x^2 \pm 1}} \times \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm 1}} = \frac{x + \sqrt{x^2 \pm 1}}{\sqrt{x^2 \pm 1}} \times \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}}$$

$$XIV.\ \left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right)' = \frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right)' = \frac{1}{2}\left(\ln|1+x| - \ln|1-x|\right)'$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} - \frac{-1}{1-x}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{1+x+1-x}{(1+x)(1-x)}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{1-x^2} = \frac{1}{1-x^2} \bullet$$

یادونه: XIII او XIV اړیکې د انتګرال په جدول کې په لاندې توګه ښودل شوي دي.

$$XIII.\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| + C = \operatorname{arcsin} hx + C$$

$$XIII'.\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C = \arccos hx + C$$

$$XIV.\ \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C = \arctan hx + C, |x| < 1$$

د XIV اړیکې په پام کې نیولو سره کولی شو وليکو

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \int \frac{dx}{-(1-x^2)} = -\int \frac{dx}{1-x^2} = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left|\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right| + C$$

په دې اساس XIV فورمول ته ورته فورمول ترلاسه کيږي:

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right| + C$$

مثالونه: د جدول کارونه د بيلابيلو توابعو په انتګرال نيونه کې نسبتا پراخ امکانات په لاس راکوي.

1. $\int \left(2\cos x - 5\sin x + e^x\right) dx = 2\int \cos x dx - 5\int \sin x dx + \int e^x dx$
$$= 2\sin x + 5\cos x + e^x + C$$

2. $\int \left(4^x - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = \int 4^x dx - \int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{4^x}{\ln 4} - \arctan x + C$

3. $\int \left(\sinh x + \frac{5}{x}\right) dx = \int \sinh x dx + 5\int \frac{dx}{x} = \cosh x + 5\ln|x| + C$

12.3 په تعويضي طريقه انتګرال نيونه

که $F\left(g\left(x\right)\right)$ مرکبه تابع په پام کې ونيسو، پوهيږو چې x متحول ته په کتو يې مشتق عبارت دی له

$$\frac{d}{dx}F\left(g\left(x\right)\right) = F_g'\left(g\left(x\right)\right)g'\left(x\right)$$

په دې اساس

$$\boxed{\int F_g'\left(g\left(x\right)\right)g'\left(x\right)dx = F\left(g\left(x\right)\right) + C}$$

که وروستۍ اړيکه د تعويضي انتګرال نيونې اساس جوړوي. که په هغه کې $g(x)=u$ او $F' = f$ تعويض شي، له دې چې $du = g'(x)dx$ دی لرو چې

$$\int f\left(g\left(x\right)\right)g'\left(x\right)dx = \int f\left(u\right)du = F\left(u\right)+C = F\left(g\left(x\right)\right)+C$$

نو ځکه په دې طريقه کې، تر انتګرال لاندې تابع، متحول د يوه مناسب متحول له جنسه داسې عوض کيږي چې اړوند انتګرال نوي متحول ته په کتو سره تعريف شي، له انتګرال وروسته بايد مخکينی متحول په اړونده تابع کې بېرته وضع شي.

1 **مثال:** $\int 3x^2 e^{x^3+1} dx$ انتګرال ترلاسه کړئ.

حل. که $u = x^2 + 1$ په پام کې ونیول شي او $du = 3xdx$ وي، نو

$$\int 3x^2 e^{x^3+1} dx = \int e^{x^3+1}\left(3x^2\right) dx = \int e^u du = e^u + C = e^{x^3+1} + C$$

2 **مثال:** $\int \sqrt{\cos x}\, \sin x\, dx$ انتګرال ترلاسه کړئ.

حل. د $u = \cos x$ او $du = -\sin x dx$ لپاره ترلاسه کوو چې:

$$\int \sqrt{\cos x}\, \sin x\, dx = \int \sqrt{u}\,(-du) = -\int u^{\frac{1}{2}} du = -\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{2}{3}(\cos x)^{\frac{3}{2}} + C$$

3**مثال:** $\int \frac{e^x}{\left(1+2e^x\right)^3} dx$ انتګرال ترلاسه کړئ.

حل. د $u = 1 + 2e^x$ او $du = 2e^x dx$ په تعویض کولو سره لرو چې

$$\int \frac{e^x}{\left(1+2e^x\right)^3} dx = \frac{1}{2}\int \frac{2e^x dx}{\left(1+2e^x\right)^3} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^3} = \frac{1}{2}\left(\frac{u^{-2}}{-2}\right) + C$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{u^2}\right) + C = -\frac{1}{4}\frac{1}{\left(1+2e^x\right)^2} + C$$

4 **مثال:** د $\int \frac{\ln^2 x dx}{x}$ انتګرال شمېرل غوښتل شوي.

حل: د $u = \ln x$ او $du = \frac{dx}{x}$ لپاره لرو چې

$$\int \frac{\ln^2 x dx}{x} = \int (\ln x)^2 \frac{dx}{x} = \int u^2 du = \frac{1}{3}u^3 + C = \frac{1}{3}\ln^3 x + C$$

5 **مثال:** د $\int \frac{\arctan x dx}{1+x^2}$ انتګرال شمېرل غوښتل شوي.

حل: $u = \arctan x$ او $du = \frac{dx}{1+x^2}$ تعویض تطبیق کوي نو ترلاسه کیږي چې:

$$\int \frac{\arctan x dx}{1+x^2} = \int \underbrace{\arctan x}_{u} \frac{dx}{1+x^2} = \int u du = \frac{1}{2}u^2 + C = \frac{1}{2}(\arctan x)^2 + C$$

6 **مثال:** د $\int \frac{x dx}{x^2+1}$ انتګرال شمېرل غوښتل شوي.

حل: $z = 1 + x^2$ او $dz = 2x\, dx$ تعویض په پام کې نیسو او ترلاسه کیږي چې:

$$\int \frac{x dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{2x dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z} = \frac{1}{2}\ln|z| + C = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + C$$

7 **مثال:** $\int \frac{dx}{x\left(\ln x+1\right)}$ انتګرال وشمېرئ.

حل: د $u=\ln|x|+1\ ,\ du=\frac{1}{x}dx$ په تعويض سره لرو چې

$$\int \frac{dx}{x\left(\ln x+1\right)}=\int \frac{1}{\ln x+1}\frac{dx}{x}=\int \frac{du}{u}=\ln|u|+C=\ln\left(\ln|x|+1\right)+C$$

8 **مثال:** د $\int \frac{e^{arc\sin 2x}}{\sqrt{1-4x^2}}dx$ انتګرال شمېرل غوښتل شوي.

حل: د $u=arc\sin 2x\ ,\ du=\frac{2dx}{\sqrt{1-4x^2}}$ په تعويض سره لرو چې:

$$\int \frac{e^{arc\sin 2x}}{\sqrt{1-4x^2}}dx=\frac{1}{2}\int e^{arc\sin 2x}\frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}=\frac{1}{2}\int e^u du=\frac{1}{2}e^u+C=\frac{1}{2}e^{arc\sin 2x}+C$$

9 **مثال:** د $\int x^2\cot x^3 dx$ انتګرال شمېرل غوښتل شوي.

حل: د $z=arc\sin 2x\ ,\ dz=\frac{2dx}{\sqrt{1-4x^2}}$ په تعويض سره لرو چې:

$$\int x^2\cot(x^3)dx=\frac{1}{3}\int \cot\overset{z}{(x^3)}\overbrace{3x^2dx}^{dz}=\frac{1}{3}\int \cot z\ dz=\frac{1}{3}\ln|\sin z|+C$$

$$=\frac{1}{3}\ln|\sin x^3|+C$$

10 **مثال:** داد د تعويضي طريقې په کارولو سره، د انتګرال ځينې فورمولونو ته په لاندې توګه تعميم ورکوو:

$$i.\quad \int\left(\overset{u}{f\ (x)}\right)^n\overbrace{f'(x)dx}^{du}=\int u^n du=\frac{u^{n+1}}{n+1}=\frac{\left(f\ (x)\right)^{n+1}}{n+1}+C\ ,\ (n\neq -1)$$

$$ii.\quad \int e^{\overset{u}{f(x)}}\overbrace{f'(x)dx}^{du}=\int e^u du=e^u=e^{f(x)}+C$$

$$iii.\quad \int\frac{f'(x)}{f\ (x)}dx=\int\frac{1}{\overset{u}{f\ (x)}}\underbrace{f'(x)dx}_{du}=\int\frac{1}{u}du=\ln|u|+C=\ln|f\ (x)|+C$$

$$vi.\quad \int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\int\frac{\frac{dx}{a}}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}=\left\lfloor\begin{matrix}u=\frac{x}{a}\\ du=\frac{dx}{a}\end{matrix}\right\rfloor=\frac{1}{a}\int\frac{du}{1+u^2}=\frac{1}{a}\arctan u+C$$

$$=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$$

$$v.\quad \int \frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{a}\int \frac{\frac{dx}{a}}{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}=\left[\begin{matrix}u=\frac{x}{a}\\ du=\frac{dx}{a}\end{matrix}\right]=\frac{1}{a}\int\frac{du}{1-u^2}=\frac{1}{a}\left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|\right]+C$$

$$=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{1+\frac{x}{a}}{1-\frac{x}{a}}\right|+C=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C$$

$$vi.\quad \int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{a^2\left[1-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]}}=\int\frac{dx}{a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}=\int\frac{\frac{dx}{a}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}$$

$$=\left[\begin{matrix}z=\frac{x}{a}\\ dz=\frac{dx}{a}\end{matrix}\right]=\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\arcsin u=\arcsin\frac{x}{a}+C$$

$$vii.\quad \int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{a^2\left(\frac{x^2}{a^2}\pm1\right)}}=\int\frac{dx}{a\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2\pm1}}=\int\frac{\frac{dx}{a}}{\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2\pm1}}$$

$$=\int\frac{du}{\sqrt{u^2\pm1}}=\ln\left|u+\sqrt{u^2\pm1}\right|+C_1=\ln\left|\frac{x}{a}+\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2\pm1}\right|+C_1$$

$$=\ln\left|\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2}{a^2}\pm1}\right|+C_1=\ln\left|\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2\pm a^2}{a^2}}\right|+C_1=\ln\left|\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2\pm a^2}}{a}\right|+C_1$$

$$=\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2\pm a^2}}{a}\right|+C_1=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|-\ln a+C_1$$

$$=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+\underbrace{\left(C_1-\ln a\right)}_{C}=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C$$

د ځينو انتګرالونو تعميم

$$i.\quad \int\left(f(x)\right)^n f'(x)\,dx=\frac{\left(f(x)\right)^{n+1}}{n+1}+C\quad,\quad (n\neq-1)$$

$$ii.\quad \int e^{f(x)}f'(x)dx=e^{f(x)}+C\quad,\quad iii.\quad \int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln\left|f(x)\right|+C$$

$$iv.\quad \int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C\quad,\quad v.\quad \int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C$$

$$vi.\quad \int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C\quad,\quad vii.\quad \int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C$$

يادونه: v دستور په لاندې توګه هم ښودل کيږي:

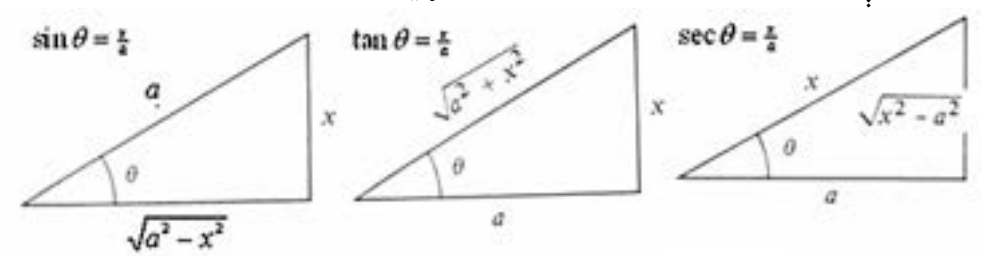
$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = -\int \frac{dx}{a^2-x^2} = -\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

12.4 مثلثاتي تعويضونه

د هغو توابعو په انتګرال نيونه کې چې يو له $\sqrt{a^2-x^2}$ ، $\sqrt{x^2\pm a^2}$ يا a^2-x^2 او $x^2\pm a^2$ افادو څخه په برکې ولري، لاندې مثلثاتي تعويضونه مناسب او ګټور دي.

افاده	د متحول تعويض	د افادې تعويض
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x = a\sin\theta$	$\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta} = a\cos\theta$
$\sqrt{x^2+a^2}$	$x = a\tan\theta$	$\sqrt{x^2+a^2} = \sqrt{a^2+a^2\tan^2\theta} = a\sec\theta$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x = a\sec\theta$	$\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a^2\sec^2\theta-a^2} = a\tan\theta$

په دې درېو واړو تعويضونو کې د قايم الزاويه مثلث اړوند د فيثاغورس له قضيې څخه ناشي شوی مثلثاتي مطابقتونه منځته راځي او په هغه کې θ زاويه کولی شو داسې وټاکو چې له انتګرال نيونې وروسته بېرته x متحول ته رجعت وکړي.



1 **مثال:** $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{16-x^2}}$ انتګرال وشمېرئ.

حل: د $x = 4\sin\theta$ له تعويض کولو څخه لرو چې

$$dx = 4\cos\theta\, d\theta \quad , \quad \sqrt{16-x^2} = \sqrt{16-16\sin^2\theta} = 4\sqrt{1-\sin^2\theta} = 4\cos\theta$$

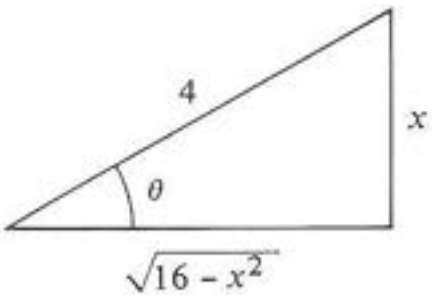
په دې اساس

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{16-x^2}} = \int \frac{4\cos\theta\, d\theta}{(16\sin^2\theta)\sqrt{16-16\sin^2\theta}} = \int \frac{4\cos\theta\, d\theta}{(16\sin^2\theta)4\sqrt{1-\sin^2\theta}}$$

$$= \int \frac{4\cos\theta\, d\theta}{(16\sin^2\theta)4\cos\theta} = \int \frac{d\theta}{16\sin^2\theta} = \frac{1}{16}\int \frac{d\theta}{\sin^2\theta} = \frac{-1}{16}\cot\theta + C$$

اوس د x متحول د بېرته وضع کولو په موخه د $x = 4\sin\theta$ اړيکې په پام کې نيولو سره داسې قايم الزاويه مثلث په پام کې نيسو چې پکې $\sin\theta = \frac{x}{4}$ وي، يعنې د مثلث وتر 4 او د θ مخامخ

ضلع x وي، د فیثاغورس اړیکې له مخې باید د دې زاویې ترڅنګ ضلع $\sqrt{16-x^2}$ وي (12.1 شکل).



12.1 شکل

له همدې مثلث څخه لیدل کیږي چې $\cot\theta = \frac{\sqrt{16-x^2}}{x}$ دی او په پایله کې

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{16-x^2}} = \frac{1}{16}\cot\theta + C = -\frac{\sqrt{16-x^2}}{16x} + C$$

2مثال: $\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$ انتګرال وشمېرئ.

حل: د $x = 2\tan\theta$ له تعویض سره لرو چې

$$dx = 2\sec^2\theta\, d\theta \quad , \quad \sqrt{4+x^2} = \sqrt{4+4\tan^2\theta} = 2\sqrt{1+\tan^2\theta} = 2\sec\theta$$

په دې اساس

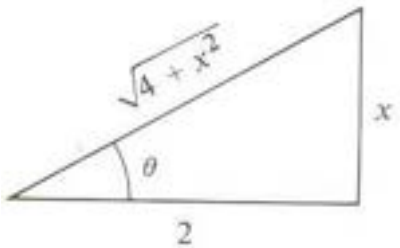
$$\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}} = \int \frac{2\sec^2\theta\, d\theta}{2\sec\theta} = \int \sec\theta d\theta = \int \frac{\sec\theta\left(\sec\theta+\tan\theta\right)d\theta}{\sec\theta+\tan\theta}$$

$$= \int \frac{\left(\sec^2\theta+\sec\theta\tan\theta\right)d\theta}{\sec\theta+\tan\theta} = \int \frac{\overbrace{\left(\sec\theta\tan\theta+\sec^2\theta\right)d\theta}^{du}}{\underbrace{\sec\theta+\tan\theta}_{u}} = \ln\left|\sec\theta+\tan\theta\right| + C_1$$

بنابرین د x متحول بېرته وضع کولو په موخه د $x = 2\tan\theta$ اړیکې په پام کې نیول سره داسې قائم الزاویه مثلث په پام کې نیسو چې پکې $\sec\theta = \frac{\sqrt{x^2+4}}{x}$ وي، یعنې په دې مثلث کې x د θ زاویې مخامخ ضلع او 2 یې د ترڅنګ ضلعې واحد وي، د فیثاغورس اړیکې له مخې د مثلث وتر $\sqrt{4+x^2}$ دی (12.2 شکل).

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}} = \ln\left|\sec\theta+\tan\theta\right| + C_1 = \ln\left|\frac{\sqrt{4+x^2}}{2}+\frac{x}{2}\right| + C_1 = \ln\left|\frac{\sqrt{4+x^2}+x}{2}\right| + C_1$$

$$= \ln\left|\sqrt{4+x^2}+x\right| - \ln 2 + C_1 = \mathrm{n}\left|\sqrt{4+x^2}+x\right| + C$$



12.2 شکل

3 **مثال:** $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx$ انتګرال وشمېرئ.

حل : د $x = 3\sec\theta$ په تعویض سره لرو چې

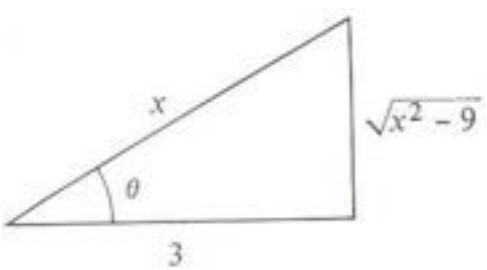
$$dx = 3\sec\theta\tan\theta\,d\theta \quad , \quad \sqrt{x^2-9} = \sqrt{9\sec^2\theta-9} = 3\sqrt{\sec^2\theta-1} = 3\tan\theta$$

په دې اساس

$$\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx = \int \frac{3\tan\theta}{3\sec\theta}3\sec\theta\tan\theta\,d\theta = \int 3\tan^2\theta\,d\theta$$

$$= 3\int(\sec^2\theta-1)\,d\theta = 3(\tan\theta-\theta)+C$$

اوس د x بېرته وضع کولو په موخه د $x = 3\sec\theta$ اړیکې او قائم الزاویه مثلث په پام کې نیولو سره چې پکې $\sec\theta = \frac{x}{3}$ وي، یعنې په دې مثلث کې $\sqrt{x^2-9}$ د θ زاویې مخامخ ضلع، 3 د ترخنګ ضلعې واحد او وتر یې د فیثاغورس د اړیکې په اساس عبارت له x څخه وي(12.3 شکل) .



12.3 شکل

له همدې مثلث څخه لیدل کیږي چې $\tan\theta = \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}$ ده او په پایله کې

$$\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx = 3\left(\frac{\sqrt{x^2-9}}{3} - arc\sec\frac{x}{3}\right)+C = 3(\tan\theta-\theta)+C$$
$$= \sqrt{x^2-9} - 3arc\sec\frac{x}{3}+C$$

12.5 دويم درجه پولينوم لرونكي انتگرالونه

په دې بحث کې هغه انتگرالونه مطرح کوو چې تر انتگرال لاندې توابع يې ax^2+bx+c دوله افاده وي، الالخصوص لاندې شکل لرونکي انتگرالونه

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx \quad \text{و} \quad \int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx$$

په عمومي توګه ax^2+bx+c افاده کولی شو؛ داسې وليکو:

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left\lfloor x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\rfloor$$

په دې اساس
$$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}$$

$4ac-b^2$ مثبت او منفي والي ته په کتو سره او د $u = x+\frac{b}{2a}$ او $\frac{4ac-b^2}{4a} = \pm k^2$ لپاره افاده لاندې شکل لري:

$$ax^2+bx+c = au^2 \pm k^2$$

د ښودنې او ارايې د پاسينو دوو طريقو څخه د غوښتل شوو انتگرالونو په تعويض او تاکلو کې ګټه پورته کوي.

مثالونه

1. $\int \frac{(2ax+b)dx}{ax^2+bx+c} = \int \frac{du}{u} = \ln|u|+C = \ln|ax^2+bx+c|+C$
2. $\int \frac{(2ax+b)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \int u^{-\frac{1}{2}}du = 2u^{\frac{1}{2}}+C = 2\sqrt{ax^2+bx+c}+C$
3. $\int \frac{dx}{x^2+2x+2} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+1} = \int \frac{du}{u^2+1} = \arctan u+C = \arctan(x+1)+C$
4. $\int \frac{dx}{x^2-5x+6} = \int \frac{dx}{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \int \frac{du}{u^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2\left(\frac{1}{2}\right)}\ln\left|\frac{u-\frac{1}{2}}{u+\frac{1}{2}}\right|+C$
$$= \ln\left|\frac{\left(x-\frac{5}{2}\right)-\frac{1}{2}}{\left(x-\frac{5}{2}\right)+\frac{1}{2}}\right|+C = \ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+C$$

5. $$\int \frac{dx}{\sqrt{9+16x-4x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{25-4(x-2)^2}} = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{4}{25}(x-2)^2}}$$

$$= \begin{bmatrix} u = \frac{2}{5}(x-2) \\ du = \frac{2}{5}dx \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{2}\arcsin u + C = \frac{1}{2}\arcsin\frac{2(x-2)}{5} + C$$

6. $$\int \frac{2x+3}{9x^2+6x+5}dx = \frac{1}{9}\int \frac{18x+27}{9x^2+6x+5}dx = \frac{1}{9}\int \frac{18x+6+21}{9x^2+6x+5}dx$$

$$= \frac{1}{9}\int \frac{18x+6}{9x^2+6x+5}dx + \frac{21}{9}\int \frac{dx}{4+(3x+1)^2} = \left\lfloor \begin{matrix} u = 9x^2+6x+5 \\ du = (18x+6)dx \end{matrix} \right\rfloor$$

$$= \frac{1}{9}\int \frac{du}{u} + \frac{7}{9}\int \frac{3dx}{4+(3x+1)^2} = \left\lfloor \begin{matrix} z = 3x+1 \\ dz = 3dx \end{matrix} \right\rfloor = \frac{1}{9}\int \frac{du}{u} + \frac{7}{9}\int \frac{dz}{4+z^2}$$

$$= \frac{1}{9}\ln|u| + \frac{7}{9}\times\frac{1}{2}\arctan\frac{z}{2} + C = \frac{1}{9}\ln(9x^2+6x+5) + \frac{7}{18}\arctan\frac{3x+1}{2} + C$$

12.6 په انقسام طريقه انتگرال نيونه

د $u = f(x)$ او $v = g(x)$ توابعو لپاره داسې چې f' او g' متمادي وي، لرو چې:

$$\boxed{\int u\,dv = u\,v - \int v\,du}$$

ثبوت: د دوو تابع د ضرب حاصل مشتق نيونې قاعدې په پام کې نيول سره

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

پاسينۍ اړيکه په لاندې توګه ليکو

$$f(x)g'(x) = \frac{d}{dx}[f(x)g(x)] - f'(x)g(x)$$

په دې اساس د کينې لور لومړنۍ تابع عبارت ده له

$$\int f(x)g'(x)dx = \int \frac{d}{dx}[f(x)g(x)]dx - \int f'(x)g(x)dx$$

له دې چې $\int \frac{d}{dx}[f(x)g(x)]dx = f(x)g(x) + C$ ده او پرته له ثابت عدد څخه په پاسينۍ اړيکه کې يې له تعويض څخه ترلاسه کوو چې

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

• ښکاره ده چې $du = f'(x)dx$ او $dv = g'(x)dx$ ده په دې اساس اصلي فورمول ثبوت شو

ددې طريقې د تطبيق لپاره، د انټګرال لاندې تابع د دوو u او v تابع ګانو د ضرب حاصل په توګه داسې په پام کې نیول کیږي چې پکې $v = \int dv$ وضاحت ولري او د $\int v\,du$ انټګرال شمېرنه د $\int u\,dv$ انټګرال په پرتله آسانه وي. انقسام طریقه د ځینو ځانګړو توابعو په انټګرال نیونه کې کاریږي.

1 **مثال:** $\int xe^{-x}\,dx$ انټګرال وشمېرئ.

حل. دلته ګټور امکان عبارت دی له

$$u = x\ ,\ dv = e^{-x}dx \Rightarrow du = dx\ ,\ v = -e^{-x}$$

په دې اساس

$$\int xe^{-x}dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -e^{-x}\left(x+1\right) + C$$

2 **مثال:** $\int x^2e^{-x}\,dx$ انټګرال وشمېرئ.

حل. وضع کوو چې

$$u = x^2 \quad , \quad dv = e^{-x}dx \quad \Rightarrow \quad du = 2xdx \quad , \quad v = -e^{-x}$$

نو لرو: $\int x^2e^{-x}dx = -x^2e^{-x} + 2\int xe^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C$

اما پوهیږو چې: $\int xe^{-x}dx = -e^{-x}\left[x+1\right] + C$

په پایله کې:

$$\Rightarrow \int x^2e^{-x}dx = -x^2e^{-x} + 2\left[-e^{-x}\left(x+1\right)\right] = -e^{-x}\left[x^2 + 2x + 2\right] + C$$

3 **مثال:** $\int \ln x\,dx$ انټګرال وشمېرئ.

حل. لاندې طبیعي تعویض په پام کې نیسو

$$u = \ln x\ ,\ dv = dx\ \Rightarrow du = \tfrac{1}{x}dx\ ,\ v = x$$

په دې اساس

$$\int \ln x\ dx = \int \underset{g'}{1}\ .\ \underset{f}{\ln x}\ dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C$$

4 **مثال:** $\int \arcsin x\,dx$ انټګرال ترلاسه کړئ.

حل. بیاهم یوازینئ ګټور تعویض عبارت دی له

$$u = \arcsin x \quad , \quad dv = dx \quad \Rightarrow \quad du = \tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \quad , \quad v = x$$

له دې ځایه

$$\int \arcsin x\,dx = x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

5 **مثال:** $\int x^4 e^{3x}\,dx$ وشمېرئ.

حل: دلته $f(x)=x^4$ او $g(x)=e^{3x}$ په پام کې نیسو له f څخه داسې متوالي مشتقونه نیسو تر څو چې نهایي مشتق یې صفر شي او د دې ترڅنګ له g څخه په همدې اندازه انتګرالونه هم ترې نیسو. د f سره له اړونده مشتقونو او د g سره له متوالي انتګرالونو او علامې بدلون د ضرب حاصل څخه یې، ځواب ترلاسه کیږي، لاندې جدول ته پام وکړئ:

$f(x)$ و مشتقات آن	علامات	$g(x)$ و توابع اولیهٔ آن
$f(x)=x^4$	+	$g(x)=e^{3x}$
$f'(x)=4x^3$	−	$\int g(x)dx=\frac{1}{3}e^{3x}$
$f''(x)=12x^2$	+	$\int \frac{1}{3}e^{3x}dx=\frac{1}{9}e^{3x}$
$f'''(x)=24x$	−	$\int \frac{1}{9}e^{3x}dx=\frac{1}{27}e^{3x}$
$f^{(4)}(x)=24$	+	$\int \frac{1}{27}e^{3x}dx=\frac{1}{81}e^{3x}$
$f^{(5)}(x)=0$	−	$\int \frac{1}{81}e^{3x}dx=\frac{1}{243}e^{3x}$

د جدول په پام کې نیول سره، غوښتل شوی انتګرال عبارت دی له:

$$\int x^4e^{3x}\,dx = x^4\tfrac{1}{3}e^{3x} - 4x^3\tfrac{1}{9}e^{3x} + 12x^2\tfrac{1}{27}e^{3x} - 24x\tfrac{1}{81}e^{3x} + 24\tfrac{1}{243}e^{3x}+C$$
$$=\left(\tfrac{1}{3}x^4-\tfrac{4}{9}x^3+\tfrac{12}{27}x^2-\tfrac{24}{81}x^3+\tfrac{24}{243}x^3\right)e^{3x}+C=\tfrac{1}{3}\left(x^4-\tfrac{4}{3}x^3+\tfrac{4}{3}x^2-\tfrac{8}{9}x+\tfrac{8}{27}\right)e^{3x}+C$$

6 **مثال:** $\int e^{2x}\sin 3x\,dx$ انتګرال وشمېرئ.

حل. دلته انقسام طریقه دوه ځلې تطبیق کیږي:

$$u=\sin 3x \quad , \quad dv=e^{2x}dx \quad \Rightarrow \quad du=3\cos 3xdx \quad , \quad v=\tfrac{1}{2}e^{2x}$$

نو:
$$\int e^{2x}\sin 3xdx=\tfrac{1}{2}e^{2x}\sin 3x-\tfrac{3}{2}\int e^{2x}\cos 3xdx \quad ... \quad (I)$$

اوس د (I) اړیکې د کینې لور انتګرال بیا هم په انقسام طریقه تحلیلوو

$$u=\cos 3x \quad , \quad dv=e^{2x}dx \quad \Rightarrow \quad du=-3\sin 3xdx \quad , \quad v=\tfrac{1}{2}e^{2x}$$

په دې اساس

$$\int e^{2x}\cos 3xdx=\tfrac{1}{2}e^{2x}\cos 3x+\tfrac{3}{2}\int e^{2x}\sin 3xdx \quad ... \quad (II)$$

د (I) مساوات قیمتونه له (II) اړیکې څخه ترلاسه کوو

$$\int e^{2x}\sin 3xdx=\tfrac{1}{2}e^{2x}\sin 3x-\tfrac{3}{2}\left(\tfrac{1}{2}e^{2x}\cos 3x+\tfrac{3}{2}\int e^{2x}\sin 3xdx\right)$$

یا دا چې:
$$\int e^{2x}\sin 3xdx=\tfrac{1}{2}e^{2x}\sin 3x-\tfrac{3}{4}e^{2x}\cos 3x-\tfrac{9}{4}\int e^{2x}\sin 3xdx$$

یعنې:
$$\int e^{2x}\sin 3xdx+\tfrac{9}{4}\int e^{2x}\sin 3xdx=\tfrac{1}{2}e^{2x}\sin 3x-\tfrac{3}{4}e^{2x}\cos 3x+C_1$$

د ښي لور هم جنس افادو له جمع کولو څخه ترلاسه کوو چې

$$\frac{13}{4}\int e^{2x}\sin 3x dx = \frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x - \frac{3}{4}e^{2x}\cos 3x + C_1$$

$$\int e^{2x}\sin 3x dx = \frac{4}{13}[\frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x - \frac{3}{4}e^{2x}\cos 3x + C_1]$$ يا:

$$\int e^{2x}\sin 3x dx = \frac{1}{13}e^{2x}(2\sin 3x - 3\cos 3x) + C.$$ په پايله کې:

7 **مثال:** $\int e^{ax}\sin bx\, dx$ انتګرال وشمېرئ.

حل: دلته انقسام طريقه دوه ځلې تطبيق کيږي:

$$u = \sin bx\ ,\ dv = e^{ax}dx \quad \Rightarrow \quad du = b\cos bx dx\ ,\ v = \frac{1}{a}e^{ax}$$

$$\Rightarrow \int e^{ax}\sin bx dx = \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx dx \quad ... \quad (I)$$

اوس د (I) اړيکې د کېنې لور انتګرال بيا هم په انقسام طريقه تحليل کيږي.

$$f = \cos bx\ , dg = e^{ax}dx \quad \Rightarrow \quad df = -b\sin bx dx\ , g = \frac{1}{2}e^{ax}$$

$$\Rightarrow \int e^{ax}\cos bx dx = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx\, dx \quad ... \quad (II)$$

د (I) مساوات قيمتونه له (II) اړيکې څخه ترلاسه کوو:

$$\int e^{ax}\sin bx dx = \frac{1}{2}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}\left\lfloor \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx\, dx \right\rfloor$$

$$\Rightarrow \int e^{ax}\sin bx\, dx = \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{3}{a^2}e^{ax}\cos bx - \frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\sin bx\, dx$$

$$\Rightarrow \int e^{ax}\sin bx\, dx + \frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\sin bx\, dx = \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a^2}e^{ax}\cos bx + C_1$$

$$\Rightarrow \frac{a^2+b^2}{a^2}\int e^{ax}\sin bx\, dx = \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a^2}e^{ax}\cos bx + C_1$$

$$\Rightarrow \int e^{\alpha ax}\sin bx dx = \frac{a^2}{a^2+b^2}[\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a^2}e^{ax}\cos bx + C_1]$$

په پايله کې

$$\boxed{\int e^{ax}\sin bx dx = \frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}\left(a\sin bx - b\cos bx\right) + C.}$$

په همدې توګه لاندې اړيکې ترلاسه کيږي:

$$\boxed{\int e^{ax}\cos bx\, dx = \frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}\left(a\cos bx + b\sin bx\right) + C.}$$

$$\boxed{\int x^n e^{ax}dx = \frac{1}{a}x^n e^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}dx}$$

د تحويل فورمولونه: که چېرې $n \geq 2$ يو طبيعي عدد وي، نو

$$\int \sin^n x\ dx = -\frac{1}{n}\cos x\ \sin^{n-1}x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}x dx$$

$$\int \cos^n x\ dx = \frac{1}{n}\sin x\ \cos^{n-1}x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}x dx$$

ثبوت: د لومړي انتګرال لپاره وضع کوو:

$$\begin{cases} u = \sin^{n-1}x \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = (n-1)\sin^{n-2}x\ \cos x \\ v = -\cos x \end{cases}$$

د $\int \sin^n x\, dx = \int \overbrace{\sin^{n-1} x}^{u} \overbrace{\sin dx}^{dv}$ او په انقسام طريقه له انتګرال نيونې څخه لرو چې:

$$\int \overbrace{\sin^{n-1} x}^{u} \overbrace{\sin dx}^{dv} = \overbrace{\sin^{n-1} x}^{u} \overbrace{(-\cos x)}^{v} - \int \overbrace{(-\cos x)}^{v} \overbrace{(n-1)\sin^{n-2} x \cos x dx}^{du}$$

يعنې: $\int \sin^n x\, dx = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x \cos^2 x\, dx$

له دې چې $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ دی، نو

$$\int \sin^n x\, dx = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\,(1-\sin^2 x)\, dx$$

يا: $\int \sin^n x\, dx = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x dx - (n-1)\int \sin^n x dx$

له دې ځايه ترلاسه کيږي چې

$$\int \sin^n x\, dx + (n-1)\int \sin^n x dx = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x dx$$

د وروستۍ اړيکې د ښي لور هم جنس افادو له جمع کولو څخه ترلاسه کوو چې:

$$n\int \sin^n x dx = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x dx$$

بالاخره په n له تقسيم وروسته پايله ترلاسه کيږي چې:

- $\int \sin^n x\, dx = -\frac{1}{n}\cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x dx$

په ورته ډول، دويمه اړيکه هم ثبوت کيږي.

مثالونه

i. $\int (\sin x)^0 dx = \int dx = x + C$

ii. $\int (\sin x)^1 dx = \int \sin x\, dx = -\cos x + C$

iii. $\int \sin^2 x\, dx = -\frac{1}{2}\cos x\ \sin^{2-1} x + \frac{2-1}{2}\int \sin^{2-2} x\, dx$

$= -\frac{1}{2}\cos x\ \sin x + \frac{1}{2}\int dx = -\frac{1}{2}\cos x\ \sin x + \frac{1}{2}x + C$

iv. $\int \sin^3 x\, dx = -\frac{1}{3}\cos x\ \sin^{3-1} x + \frac{3-1}{3}\int \sin^{3-2} x\, dx$

$= -\frac{1}{3}\cos x\ \sin^2 x + \frac{2}{3}\int \sin x\, dx = -\frac{1}{3}\cos x\ \sin^2 x - \frac{2}{3}\cos x + C$

12.7 مثلثاتي انتګرالونه

د طاقت توابعو مثلثاتي انتګرالونه: دغه ډول انتګرالونه $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$ شکل لري چې پکې تام غير منفي اعداد دي او لاندې حالات په بر کې لري:

لومړی حالت: که د انتګرال لاندې توابع په يوه وخت کې جفت وي. د توابعو د درجو را ټيټولو لپاره له لاندې مثلثاتي فورمولونو څخه استفاده کوو:

$$\boxed{\sin^2 x = \tfrac{1}{2}(1-\cos 2x) \quad , \quad \cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1+\cos 2x)}$$

مثالونه

1. $\int \sin^2 3x dx = \int \frac{1}{2}(1-\cos 6x)\,dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{6}\sin 6x\right) + C$
2. $\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx = \int \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\,dx$
$= \frac{1}{4}\int (1-\cos^2 2x)\,dx = \frac{1}{4}\int \left[1 - \frac{1}{2}(1+\cos 4x)\right] dx$
$= \frac{1}{8}\int (1-\cos 4x)\,dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + C$
3. $\int \cos^4 3x\, dx = \int \frac{1}{4}\left(1+\cos^6 x\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1 + 2\cos 6x + \cos^2 6x)\,dx$
$= \frac{1}{4}\int \left(\frac{3}{2} + 2\cos 6x + \frac{1}{2}\cos 12x\right) dx = \frac{3}{8}x + \frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{96}\sin 12x + C$.

دويم حالت: كه د لږ تر لږه انتګرال لاندې تابع يو توان تاق وي. له تعويضي طريقې څخه كار اخلو:

مثالونه

4. $\int \sin^3 x \cos x\, dx = \int u^3 du = \frac{1}{4}u^4 + C = \frac{1}{4}\sin^4 x + C$
5. $\int \sin^3 x \cos^2 x dx = \int (1-\cos^2 x)\cos^2 x \sin x dx = \int (u^4 - u^2) du$
$= \frac{1}{5}u^5 - \frac{1}{3}u^3 + C = \frac{1}{5}\cos^5 x - \frac{1}{3}\cos^3 x + C$
6. $\int \cos^5 x\, dx = \int (1-\sin^2 x)^2 \cos x\, dx = \int (1-u^2)^2 du = \int (1 - 2u^2 + u^4) du$
$= u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 + C = \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C$

دريم حالت: كه چېرې انتګرال $\int \sin^n x dx$ يا $\int \cos^n x dx$ شكلونه ولري، يو له لومړي او دويم حالتونو څخه كېداى شي تطبيق شي او سربېره پر دې د تحويل له فورمولونو څخه هم ګټه اخيستل كېږي.

د ضرب حاصل مثلثاتي انتګرالونه: دغه انتګرالونه درې لاندې شكلونه لري:

$\int \sin mx \sin nx\, dx$ ، $\int \cos mx \cos nx\, dx$ ، $\int \sin mx \cos nx\, dx$ و

د دې انتګرالونو د شمېرلو لپاره له لاندې فورمولونو څخه ګټه پورته كوو:

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2}[\cos(A-B) - \cos(A+B)]$$
$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A-B) + \cos(A+B)]$$
$$\sin A \cos B = \frac{1}{2}[\sin(A-B) + \sin(A+B)]$$

7 **مثال:** $\int \sin 4x \cos 5x dx$ وشمېرئ.

حل:

$$\int \sin 4x \cos 5x\, dx = \int \frac{1}{2}[\sin(-x) + \sin 9x]\, dx$$
$$= \frac{1}{2}\int (-\sin + \sin 9x)\, dx = \frac{1}{2}\left(\cos x - \frac{1}{9}\cos 9x\right) + C$$

12.8 د ناطق توابعو انتګرال نیونه

که چېرې په $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ انتګرال کې، د پولینوم صورت درجه د مخرج له درجې څخه لوړه وي، که چېرې صورت پر مخرج تقسیم کړو، د انتګرال لاندې تابع د یوه پولینوم او یوه کسر (چې صورت یې له مخرج څخه یوه درجه ټیټ وي)، د مجموعې په توګه اوړي. په دې اساس مساله د نسبتي تابع انتګرال نیونې ته چې پکې د مخرج درجه د صورت له درجې څخه لوړه وي ارجاع کیږي.

د ناطق کسرونو د انقسام دستور چې په شپږم څپرکي کې بحث پرې وشو او د هغه مطابق د یوې ناطق تابع له انتګرال نیونې مخکې مو د دستور سره سم تر انتګرال لاندې کسر په ممکنه قسمي کسرونو تجزیه کولو او په دې توګه انتګرال نیونه یې آسانه کېدله. بیا هم په لاندې مثالونو اکتفا کوو:

1مثال: $\int \frac{x^3+x^2+x-1}{x^2+2x+2}dx$ وشمېرئ ؟

حل. د دې کسر صورت په مخرج تقسیموو نو لرو چې:

$$\frac{x^3+x^2+x-1}{x^2+2x+2} = x-1+\frac{x+1}{x^2+2x+2}$$

په دې اساس

$$\int \frac{x^3+x^2+x-1}{x^2+2x+2}dx = \int\left(x-1+\frac{x+1}{x^2+2x+2}\right)dx$$
$$= \tfrac{1}{2}x^2 - x + \tfrac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+2\right)+C$$

2 مثال: $\int \frac{5}{(2x+1)(x-2)}dx$ انتګرال وشمېرئ ؟

حل. د دې کسر مخرج دوه خطي فکتورونه لري او په لاندې توګه تجزیه کیږي:

$$\frac{5}{(2x+1)(x-2)} = \frac{A}{2x+1}+\frac{B}{x-2}$$

د وروستي مساوات ښی خوا هم مخرج کولو او د دواړو خواوو له پرتله کولو څخه ترلاسه کوو چې:

$$5 = A(x-2)+B(2x+1) = (A+2B)x+(-2A+B)$$

$$\begin{cases} A+2B &= 0 \\ -2A+B &= 5 \end{cases}$$

د پاسیني سیستم له حل وروسته $A=-2$ او $B=1$ ترلاسه کیږي، نو

$$\frac{5}{(2x+1)(x-2)} = \frac{-2}{2x+1} + \frac{1}{x-2}$$

$$\int \frac{5}{(2x+1)(x-2)}\,dx = -\int \frac{2dx}{2x+1} + \int \frac{dx}{x-2}$$
$$= -\ln|2x+1| + \ln|x-2| + C = \ln\left|\frac{x-2}{2x+1}\right| + C.$$

3 **مثال:** د $\int \frac{4x^2-3x-4}{x^3+x^2-2x}\,dx$ انتګرال شمېرل غوښتل شوي ؟

حل. تر هرڅه د مخه د کسر مخرج بايد تجزيه کړو

$$x^3+x^2-2x = x(x^2+x-2) = x(x-1)(x+2)$$
$$\frac{4x^2-3x-4}{x^3+x^2-2x} = \frac{4x^2-3x-4}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$$

د ښيۍ خوا کسرونو له هم مخرج کولو او د صورتونو له پرتله کولو څخه تر لاسه کوو چې:

$$4x^2-3x-4 = A(x-1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-1)$$
$$\Rightarrow 4x^2-3x-4 = (A+B+C)x^2 + (A+2B-C)x + (-2A)$$
$$\begin{cases} A+B+C = 4 \\ A+2B-C = -3 \\ -2A = -4 \end{cases} \Rightarrow A=2,\ B=-1,\ C=3$$

$$\Rightarrow \int \frac{4x^2-3x-4}{x^3+x^2-2x}\,dx = \int\left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{3}{x+2}\right)dx$$
$$= 2\ln|x| - \ln|x-1| + 3\ln|x+2| + C = \ln\left|\frac{x^2(x+2)^3}{x-1}\right| + C.$$

4 **مثال:** $\int \frac{5x^3-3x^2+2x-1}{x^4+x^2}\,dx$ انتګرال وشمېرئ.

حل. $\frac{5x^3-3x^2+2x-1}{x^4+x^2} = \frac{5x^3-3x^2+2x-1}{x^2(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$

د کسرونو له تجنيس او د صورتونو له پرتله کولو وروسته لرو چې

$$5x^3-3x^2+2x-1 = Ax(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx+D)x^2$$
$$5x^3-3x^2+2x-1 = (A+C)x^3 + (B+D)x^2 + Ax + B$$
$$\Rightarrow \begin{cases} A+C = 5 \\ B+D = -3 \\ A = 2 \\ B = -1 \end{cases} \Rightarrow A=2,\ B=-2,\ C=3, D=-2$$

$$\Rightarrow \int \frac{5x^3-3x^2+2x-1}{x^4+x^2}\,dx = \int\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{3x-2}{x^2+1}\right)dx$$
$$= 2\ln|x|+\frac{1}{x}+\frac{3}{2}\int\frac{2xdx}{x^2+1}-2\int\frac{dx}{x^2+1}$$
$$= 2\ln|x|+\frac{1}{x}+\frac{3}{2}\ln\left(x^2+1\right)-2\arctan x+C.$$

هغه انټګرالونه چې د ښودلو وړ نه دي: د هر ناطق تابع انټګرال په عمومي توګه يوه ناطق تابع نه ده، له څرنګه چې $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x|+C$ دی، ضمنا داسې انټګرال منونکې توابع هم موجودې دي چې انټګرالونه يې د اساسي توابعو په توګه نشي ښودل کېدلی، د دې توابعو ځينې يې عبارت دي له:

$$i.\ \int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^3}}\ ,\ ii.\ \int\frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}\ ,\ iii.\ \int\frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}\ ,\ iv.\ \int\frac{\sin x}{x}dx$$
$$v.\ \int\frac{\cos}{x}dx\ ,\ vi.\ \int\frac{dx}{\ln x}\ ,\ vii.\ \int\frac{xdx}{\ln x}\ ,\ viii.\ \int e^{-x^2}dx\ ,\ ix.\ \int\frac{e^x}{x}$$

د پاسينيو توابعو اړوند معين انټګرالونه په عددي طريقو شمېرل کېږي.

12.9 معين انټګرال

د معين انټګرال تعريف: که څه هم معين انټګرال د شمېرنو د مهم فن په توګه له غيرمعين انټګرال سره مستقيم اړيکه لري، اما کولی شو په خپلواکه توګه د يو ډول عددي لړې د قيمتونو له جنسه د تابع قيمتونه مطرح کړو:

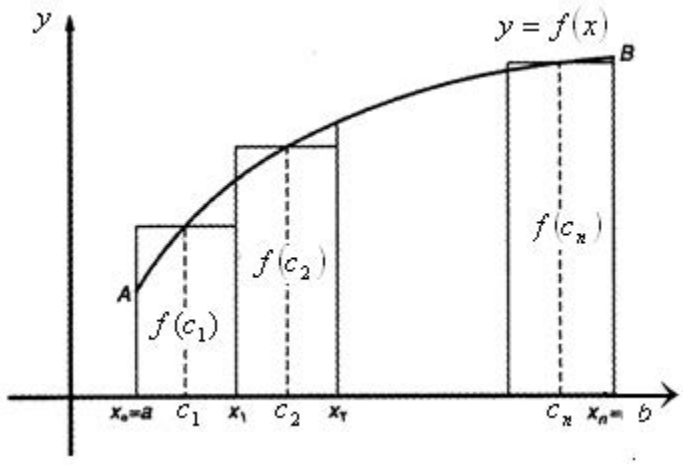
که چېرې $f(x)$ په $[a\,,b]$ ترلي انټروال کې يوه متمادي تابع تعريف شوې وي، د x_n حقيقي اعدادو ترادف د همدې انټروال څخه د $(n=0,1,2,\cdots,n)$ لپاره داسې وي چې

$$i.\quad a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$$
$$ii.\quad \Delta x_k=x_k-x_{k-1},\ k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n$$
$$iii.\quad \Delta x_k\to 0\ \Leftrightarrow\ n\to\infty$$
$$iv.\quad x_{k-1}\le c_k\le x_k\ ,\ k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n$$

په دې صورت کې له a څخه تر b پورې د $f(x)$ معين انټګرال عبارت دی له:

$$\int_a^b f\ (x)dx=\lim_{n\to\infty}\left[f\ (c_1)\Delta x_1+f\ (c_2)\Delta x_2+\cdots+f\ (c_n)\Delta x_n\right]=\sum_{k=1}^{\infty}f\ (c_k)\Delta x_k$$

a او b اعداد په ترتيب د انټګرال لاندې لاندينې او پاسينې حدونه بلل کېږي او $\sum_{k=1}^{n}f(c_k)\Delta x_k$ افاده د ريمان مجموعې په نامه يادوي (12.4 شکل)



12.4 شکل

که $f(x)$ تابع په $[a\,,b]$ انټروال کې منفي قیمت ونلري او متمادي وي، د هندسې له نظره $\int_a^b f(x)\,dx$ انټګرال د هغې سطحې له مساحت سره مساوي دی چې د $y=f(x)$ منحني او x محور ترمنځ د $x=a$ تر $x=b$ واټن پورې راچاپېر شوی وي

1 مثال: $\int_0^3 4x\,dx$ معین انټګرال وشمېرئ.

حل. د انټګرال لاندې تابع $f(x)=4x$ او اړوند انټروال $[0\,,3]$ دی، دلته د آسانۍ لپاره

$$\Delta x_1=\Delta x_2=\Delta x_3=\cdots=\Delta x_n=\Delta x=\tfrac{3-0}{n}=\tfrac{3}{n}$$

په پام کې نیسو، c_n ترادف په لاندې توګه تاکل کیږي:

$$c_1=\Delta x=\tfrac{3}{n} \qquad \Rightarrow f(c_1)=4c_1=4\left(\tfrac{3}{n}\right)$$
$$c_2=2\Delta x=2\times\tfrac{3}{n} \Rightarrow f(c_2)=4c_2=4\left(2\times\tfrac{3}{n}\right)$$
$$c_3=3\Delta x=3\times\tfrac{3}{n} \Rightarrow f(c_3)=4c_3=4\left(3\times\tfrac{3}{n}\right)$$
$$\cdots$$
$$c_k=k\,\Delta x=k\times\tfrac{3}{n}\Rightarrow f(c_k)=4c_k=4\left(k\times\tfrac{3}{n}\right)$$

د ریمان مجموعې په کارولو سره لرو چې:

$$\int_0^3 f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\left[f(c_1)\Delta x_1+f(c_2)\Delta x_2+\cdots+f(c_n)\Delta x_n\right]$$

په دې اساس

$$\int_0^3 4x\,dx = \lim_{n\to\infty}\left[4\left(\tfrac{3}{n}\right)\tfrac{3}{n} + 4\left(2\cdot\tfrac{3}{n}\right)\tfrac{3}{n} + \cdots + 4\left(n\cdot\tfrac{3}{n}\right)\tfrac{3}{n}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\tfrac{36}{n^2}(1+2+3+\cdots+n)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\tfrac{36}{n^2}\cdot\tfrac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\tfrac{36}{2}\cdot\tfrac{n+1}{n}\right] = 18\lim_{n\to\infty}\tfrac{n+1}{n} = 18\cdot 1 = 18$$

نو ترلاسه شو چې $\int_0^3 4x\,dx = 18$.

تعريف

1. د $a > b$ لپاره لرو چې: $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

2. كه $f(a)$ موجود وي، په دې صورت كې: $\int_a^a f(x)dx = 0$

قضيه

1. كه چېرې f په $[a,b]$ انتروال كې متمادي وي، نو f په $[a,b]$ د انتګرال نيولو وړ دی.

2. كه چېرې f متمادي او په $[a,b]$ انتروال كې $f(x) \geq 0$ وي، نو د f تابع د ګراف او x محور ترمنځ له a څخه تر b پورې را چاپېر شوی مساحت عبارت دی له:

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

د معين انتګرال ځانګړتياوې: د f ، g متمادي توابعو او k عدد لپاره لرو چې:

$$I \quad \int_a^b k\,dx = k(b-a)$$

$$II. \quad \int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx \quad , \quad k = const.$$

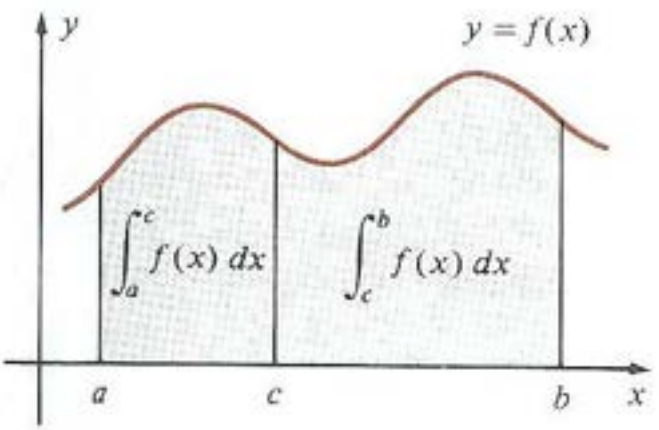
$$III. \quad \int_a^b \left[f(x) \pm g(x)\right]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

$$IV. \quad \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad , \quad a < b < c$$

$$V. \quad m \leq f(x) \leq M \Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

$$VI. \quad f(x) \geq 0, x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$$

$$VII. \quad f(x) \geq g(x), x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$



12.5 شکل

د انتګرال اساسي قضيه: که چېرې $f(x)$ په $[a\ ,\ b]$ ترلي انتروال کې متمادي تابع وي او $F(x)$ د $f(x)$ لومړنۍ تابع وي، نو

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \quad , \quad F'(x) = f(x)$$

دغه قضيه معين او غير معين انتګرالونه له يوه بل سره ننبلوي(مربوطو کوي) او ضمنا د معين انتګرال شمېرنې آسانه کوي.

مثالونه

2. $\int_{-1}^{2} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} = \frac{2^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{8}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = 3$

3. $\int_0^{\pi} \sin x\ dx = -\cos x\,|_0^{\pi} = -\cos\pi - (-\cos 0) = -(-1) - (-1) = 2$

4. $\int_0^4 e^x dx = [e^x]_0^4 = e^4 - e^0 = e^4 - 1$

5. $\int_1^e \left(1 + 2x - \frac{1}{x}\right) dx = [x + x^2 - \ln x]_1^e = (e + e^2 - \ln e) - (1 + 1^2 - \ln 1)$

$$= (e + e^2 - 1) - (1 + 1^2 - 0) = e + e^2 - 3$$

د معين انتګرال منځنۍ قيمت: که چېرې $f(x)$ تابع په $[a\ ,\ b]$ انتروال کې متمادي وي ، لږ تر لږه يو c عدد له $[a\ ,\ b]$ څخه موجود دی، داسې چې:

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

معين انتګرال او د انقسام طريقه: په غير معين انتګرالونو کې مو چې څرنګه په انقسام طريقه انتګرالونه ونيول، معين انتګرالونه هم لاندې دستور موجود دی:

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx \quad = \quad u(x)\,v(x)\Big|_a^b \quad - \quad \int_a^b v(x)\,u'(x)\,dx$$

3 **مثال:**

$$\int_0^1 x\,e^{-x}dx = \Big[-xe^{-x}\Big]_0^1 - \int_0^1 \left(-e^{-x}\right)dx = -e^{-1} + \Big[-e^{-x}\Big]_0^1 = 1-2e^{-1}$$

په معين انتګرال کې د متحول تعويض: که په $\int_a^b f\left(g(x)\right)g'(x)\,dx$ معين انتګرال کې $u=g(x)$ تعويض په پام کې ونيسو، نو $du=g'(x)dx$ کيږي، په دې صورت کې لرو چې:

$$\int_a^b f\left(g(x)\right)g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

4 **مثال:** $\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$ انتګرال شمېرو.

حل. که $u=g(x)=x^3+1$ وضع کړو $du=3x^2$ ، $g(-1)=0$ او $g(1)=2$ کيږي، نو

$$\int_{-1}^{1} \underbrace{\sqrt{x^3+1}}_{u}\cdot\underbrace{3x^2dx}_{du} = \left|\begin{matrix} u=x^3+1 \\ x=1\Rightarrow u=2 \\ x=-1\Rightarrow u=0 \end{matrix}\right| = \int_0^2 \sqrt{u}\,du = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2 = \frac{2}{3}\left[2^{\frac{3}{2}}-0^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

5 **مثال:** د $\int_0^5 \frac{xdx}{x^2+10}$ انتګرال شمېرل غوښتل شوي.

حل. د $u=g(x)=x^2+10$ ، $du=2xdx$ ، $g(0)=10$ او $g(5)=35$ لپاره لرو چې

$$\int_0^5 \frac{xdx}{x^2+10} = \frac{1}{2}\int_0^5 \frac{2xdx}{x^2+10} = \frac{1}{2}\int_{10}^{35}\frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u|\Big|_{10}^{35} = \frac{1}{2}\left(\ln 35-\ln 10\right)\approx 0.625$$

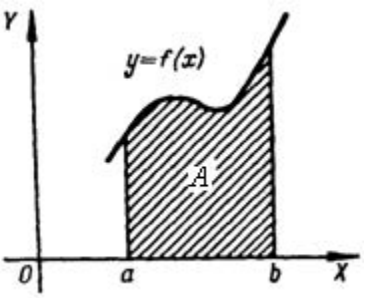
12.10 د معين انتګرال کارونې

له معين انتګرال څخه د سطحو په مساحت شمېرلو، د منحني ګانو اوږدوالي په ټاکلو، د حجم په ترلاسه کولو، په فزيک کې د کار شمېرلو، د اجسامو ثقل مرکز مختصاتو ټاکلو او داسې نورو برخو کې استفاده کيږي، دلته د څو بېلګو په ذکر کولو اکتفا کوو.

د کرافونو ترمنځ مساحت شمېرنه

(1) که چېرې f متمادي تابع په $[a,b]$ انتروال کې منفي قیمتونه ولري، یعنې له $[a,b]$ څخه هر x ته $f(x)\le 0$ نامساوات صدق وکړي، نو د هغه سطحي مساحت چې د $y=f(x)$ منحني او x محور ترمنځ د $x=a$ او $x=b$ خطونو پواسطه راچاپېر شوې وی(12.6 شکل)، عبارت دی له:

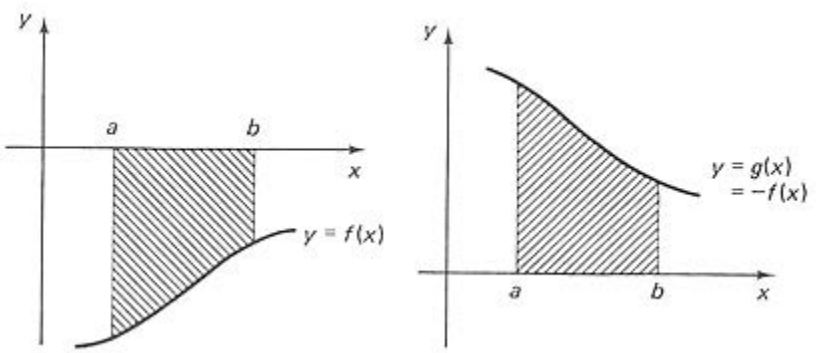
$$A=\int_a^b f(x)dx$$



12.6 شکل

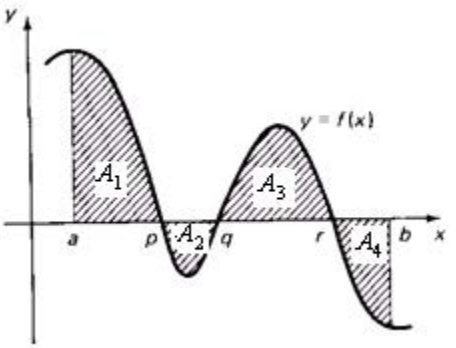
(2) که چېرې f متمادي تابع په $[a,b]$ انتروال کې مثبت قیمتونه ولري، یعنې له $[a,b]$ څخه هر x ته $f(x)\le 0$ نامساوات صدق وکړي، نو د هغې سطحي مساحت چې د $y=f(x)$ منحني او x محور ترمنځ(12.7 شکل) د $x=a$ او $x=b$ خطونو په درلودلو سره را چاپېر وي، په راکړل شوي انتروال کې د $y=g(x)=-f(x)$ منحني ترمنځ له مساحت څخه عبارت دی، یعنې

$$A=-\int_a^b f(x)dx$$



12.7 شکل

(3) که چېرې f تابع په يوه انټروال کې خپله اشاره په محدود ډول واړوي را واړوي، په هغه واټنونو کې چې منفي اشاري ولري له $-f(x)$ څخه او که مثبت اشاره ولري له $+f(x)$ څخه انټګرال نيسو د دوی له مجموع څخه د يادې سطحې مساحت شمېرل کېږي (12.8 شکل).



12.8 شکل

مثلا د پاسيني شکل مطابق حالت لپاره لرو چې:

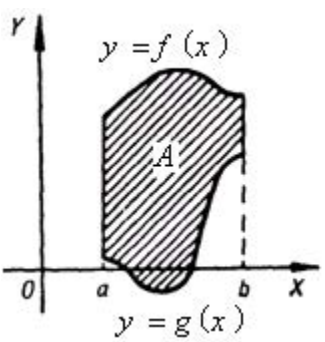
$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = \int_a^p f(x)\,dx - \int_p^q f(x)\,dx + \int_q^r f(x)\,dx - \int_r^b f(x)\,dx$$

نو ځکه په $[a\ ,\ b]$ انټروال کې د $y = f(x)$ ګراف او x محور ترمنځ سطحې مساحت عبارت دی له:

$$\boxed{A = \int_a^b |f(x)|\,dx}$$

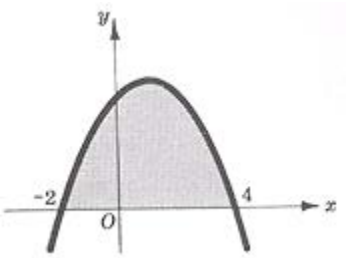
(4) د هغې سطحې مساحت چې په $[a\ ,\ b]$ انټروال کې د $y = f(x)$, $y = g(x)$ توابعو ګراف ترمنځ مشروط په $f(x) \geq g(x)$ راچاپېر شوی وي (12.9 شکل)، عبارت دی له:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$



12.9 شکل

1 **مثال:** د هغې سطحې مساحت وشمېرئ چې د $y = 8 + 2x - x^2$ منحني او x محور ترمنځ را چاپېر شوې وي(12.10 شکل).



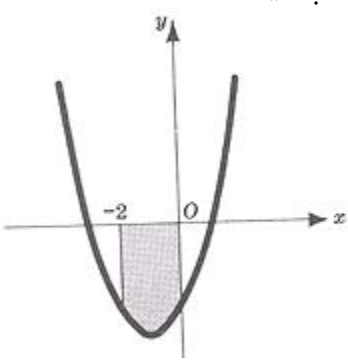
12.10 شکل

حل. یاده منحني x محور په $x = -2$ او $x = 4$ نقطو کې قطع کوي او په $[-2\ ,\ 4]$ انټروال کې د y قیمتونه منفي نه دي، نو غوښتل شوی مساحت عبارت دی له:

$$A = \int_{-2}^{4} (8 + 2x - x^2)dx = \left(8x + x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{4}$$

$$= \left(8\cdot 4 + 4^2 - \frac{4^3}{3}\right) - \left[8(-2) + (-2)^2 - \frac{(-2)^3}{3}\right] = 38\, sq\,u$$

2 **مثال:** د هغې سطحې مساحت وشمېرئ چې د $y = x^2 + 2x - 3$ منحني او x محور ترمنځ په $[-2\ ,\ 0]$ انټروال کې راچاپېر شوې وي(12.11 شکل)



12.11 شکل

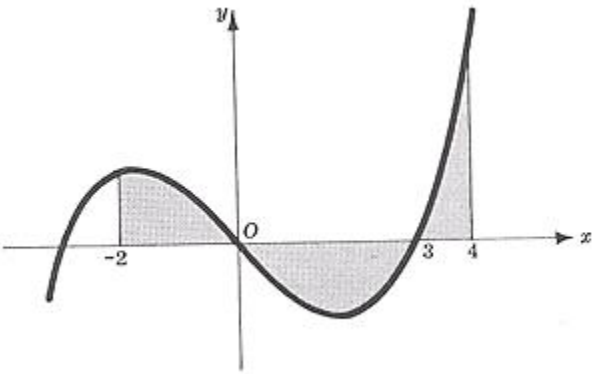
حل. په راکړل شوي انټروال کې $y \le 0$ دی په دې اساس غوښتل شوی مساحت په لاندې توګه شمېرل کیږي:

$$A = -\int_{-2}^{0} (x^2 + 2x - 3)dx = -\left(\frac{x^3}{3} + x^2 - 3x\right)\Big|_{-2}^{0}$$

$$= -\left(\frac{0^3}{3} + 0^2 - 3\times 0\right) + \left[\frac{(-2)^3}{3} + (-2)^2 - 3(-2)\right] = \frac{22}{3}\ sq\,u$$

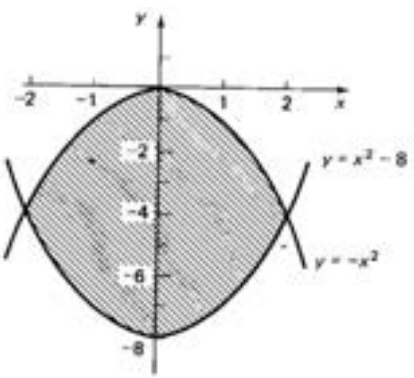
3 **مثال:** د هغې سطحې مساحت ترلاسه کړئ چې د $y = x^3 - 9x$ منحني او x محور ترمنځ په $[-2\ ,\ 4]$ انټروال کې چاپېر شوی وي.

حل. د ګراف له رسمولو وروسته لیدل کیږي چې د تابع قیمتونه په $(0, -2)$ او $(4, 3)$ انتروالونو کې مثبت او په $(2, 0)$ انتروال کې منفي دي، په دې اساس راکړل شوی مساحت عبارت دی له:



$$A = \int_{-2}^{0}(x^3-9x)dx - \int_{0}^{3}(x^3-9x)dx + \int_{3}^{4}(x^3-9x)dx$$
$$= \left(\tfrac{x^4}{4}-\tfrac{9}{2}x^2\right)\Big|_{-2}^{0} - \left(\tfrac{x^4}{4}-\tfrac{9}{2}x^2\right)\Big|_{0}^{3} + \left(\tfrac{x^4}{4}-\tfrac{9}{2}x^2\right)\Big|_{3}^{4}$$
$$= [0-(4-18)] - \left[\left(\tfrac{81}{4}-\tfrac{81}{2}\right)-0\right] + \left[(64-72)-\left(\tfrac{81}{4}-\tfrac{81}{2}\right)\right]$$
$$= 14-\left(-\tfrac{81}{4}\right)+\tfrac{49}{4} = \tfrac{93}{2}\ sq.u$$

4 **مثال:** د هغې سیمې مساحت وشمېرئ چې د دوو $y=-x^2$ او $y=x^2-8$ منحني ګانو ترمنځ چاپېر شوې وي.



12.12 شکل

حل : د فرض شوي منحني ګانو د تقاطع نقطې په لاندې توګه تاکل کیږي:

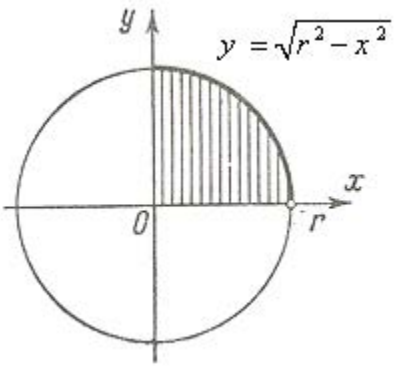
$$-x^2 = x^2-8 \Rightarrow 2x^2-8=0 \Rightarrow x=\pm 2$$

په دې اساس د منحني ګانو ترمنځ غوښتل شوې ناحیه په $[2\ ,\ -2]$ انټروال کې واقع ده او مساحت یې عبارت دی له:

$$A=\int_{-2}^{2}\left[\left(-x^{2}\right)-\left(x^{2}-8\right)\right]dx=\int_{-2}^{2}\left(8-2x^{2}\right)dx$$

$$=\left[8x-\tfrac{2}{3}x^{3}\right]_{-2}^{2}=\left(16-\tfrac{16}{3}\right)-\left(-16+\tfrac{16}{3}\right)=\tfrac{64}{3}$$

5 **مثال(د دایرې مساحت شمېرل):** د هغې دایرې مساحت وشمېرئ چې شعاع یې r وي.



12.13 شکل

حل: د r شعاع لرونکې دایرې معادله په ترټولو ساده حالت(12.13 شکل) کې لاندې شکل لري:

$$x^{2}+y^{2}=r^{2}$$

نو $y=\sqrt{r^2-x^2}$ منحني د اړونده دایرې پاسینۍ برخه ده او که د دایرې مساحت A وي، د ربع(څلورمې برخې) مساحت یې په لاندې توګه شمېرو

$$\frac{A}{4}=\int_{0}^{r}\sqrt{r^{2}-x^{2}}dx$$

$x=r\sin t$ تعویض په پام کې نسو، نو $dx=r\cos t$ کیږي او سرښیره پر دې

$$0=r\sin t\Rightarrow\sin t=0\Rightarrow t=0$$

$$r=r\sin t\Rightarrow\sin t=1\Rightarrow t=\tfrac{\pi}{2}$$

په دې اساس

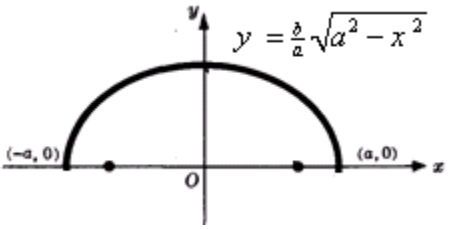
$$\frac{A}{4}=\int_{0}^{r}\sqrt{r^{2}-x^{2}}dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{r^{2}-r^{2}\sin^{2}t}\;r\cos t dt=r\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^{2}t}\,r\cos t\,dt$$

$$= r\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos tr\cos t\,dt = r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1+\cos 2t)\,dt = \frac{r^2}{2}\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \frac{r^2}{2}\left[\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin\pi\right)-\left(0+\frac{1}{2}\sin 0\right)\right] = \frac{1}{4}\pi r^2$$

يعنې، د دايرې د څلورمې برخې مساحت $\frac{A}{4} = \frac{1}{4}\pi r^2$ دی، په دې اساس د دايرې مساحت عبارت دی له:

$$\boxed{A = \pi r^2}$$

6 **مثال(د بيضوي مساحت شمېرنه):** د بيضوي مساحت وشمېرئ چې ستر او وړوکی قطر يې په ترتيب $2a$ او $2b$ وي.



12.14 شکل

حل: د (12.14 شکل) بيضوي معادله په لاندې توګه په پام کې نيسو:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$$

له دې ځايه

$$\frac{y^2}{b^2} = 1-\frac{x^2}{a^2} \Rightarrow \frac{y}{b} = \sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2}} \Rightarrow y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

نو $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ منحني د يادې بيضوي پاسينۍ برخه ده او که د بيضوي مساحت A وي، د ربع(څلورمې برخې) مساحت يې په لاندې توګه شمېرل کيږي.

$$\frac{A}{4} = \int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx$$

$x = a\sin t$ تعويض په پام کې نيسو، نو $dx = a\cos t$ کيږي او سرښېره پر دې:

$$0 = a\sin t \Rightarrow \sin t = 0 \Rightarrow t = 0$$
$$a = a\sin t \Rightarrow \sin t = 1 \Rightarrow t = \tfrac{\pi}{2}$$

په دې اساس

$$\frac{A}{4} = \frac{b}{a}\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = \frac{b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}\;\; a\cos t dt$$

$$= \frac{b}{a}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\;\; a\cos t\, dt = ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\, a\cos t\, dt$$

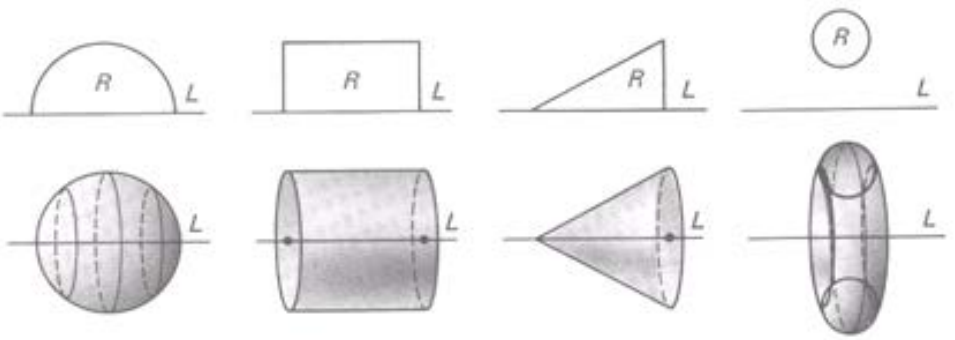
$$= ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt = ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1+\cos 2t)\,dt = \frac{ab}{2}\left[t + \frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{ab}{2}\left[\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin\pi\right) - \left(0 + \frac{1}{2}\sin 0\right)\right] = \frac{1}{4}\pi ab$$

يعني د بيضوي د څلورمي برخې مساحت $\frac{A}{4} = \frac{1}{4}\pi ab$ دی، په دې اساس د بيضوي مساحت $A = \pi ab$ دی.

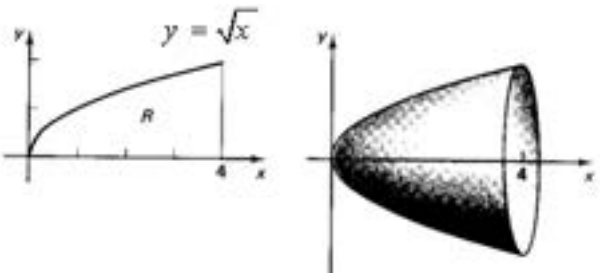
د دوراني اجسامو سطحو او حجمونو شمېرل: داسې سطح په پام کې نيسو چې د $y = f(x)$ متمادي تابع د ګراف او x محور ترمنځ په $[a\ ,\ b]$ انتروال کې چاپېر وي(12.15 شکل)، که دغه سطحه د x محور په شاوخوا دوران ومومي، دوراني جسم منځته راوړي، چې (S) مساحت او (V) حجم يې عبارت دی له:

$$S = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx\ ,\ V = \pi\int_a^b \left[f(x)\right]^2 dx$$



12.15 شکل

7 **مثال:** د هغه جسم حجم وشمېرئ چې په $[0\ ,\ 4]$ انتروال کې د x محور په شاوخوا د $y = \sqrt{x}$ منحني له دوران څخه منځته راغلی وي(12.16 شکل).



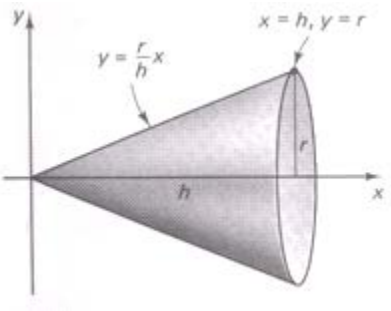
12.16 شکل

حل : د دستور له مخې د راکړل شوي جسم حجم عبارت دی له:

$$V = \pi \int_0^4 \left[f(x) \right]^2 dx = \pi \int_0^4 \left[\sqrt{x} \right]^2 dx$$

$$= \pi \int_0^4 x\,dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^4 = \pi \left[\frac{4^2}{2} - \frac{0}{4} \right]_0^4 = 8\pi$$

8 **مثال(د مخروط حجم شمېرل):** د دوران محور په شاوخوا د دوو $y = \frac{r}{h}x$ او $x = h$ مستقیمونو ترمنځ د چاپېرې مثلثي ناحیې له دوران څخه (12.17 شکل)، چې کوم جسم تولیدیږي، نوعیت او حجم یې ترلاسه کړئ.



12.17 شکل

حل : منځته راغلی جسم عبارت له هغه مخروط څخه دی چې د قاعدې شعاع یې r او ارتفاع یې h وي، د دستور له مخې د یاد مخروط حجم په لاندې توګه شمېرل کیږي:

$$V = \pi \int_0^h \left(y^2 \right) dx = \pi \int_0^h \left(\frac{r}{h} x \right)^2 dx = \pi \frac{r^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx$$

$$= \pi \frac{r^2}{h^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^h = \pi \frac{r^2}{h^2} \left[\frac{h^3}{3} - 0 \right] = \frac{\pi}{3} r^2 h .$$

9 **مثال(د کرې مساحت او حجم شمېرل)**: د کرې حجم او سطحې مساحت يې و شمېرئ چې شعاع يې r وي.

حل: که $x^2+y^2=r^2$ دايره د x محور په شاوخوا دوران ومومي، r شعاع لرونکې کره مجسم کيږي چې مساحت يې په لاندې توګه شمېرل کيږي.

له $x^2+y^2=r^2$ اړيکې څخه y متحول د x تابع په توګه يعنې $y=\sqrt{r^2-x^2}$ ښيو، نو ځکه د کرې حجم عبارت دی له:

$$V=\pi\int_{-r}^{r}y^2dx=\pi\int_{-r}^{r}\left(r^2-x^2\right)dx=\pi\left[r^2x-\frac{1}{3}x^2\right]_{-r}^{r}=\frac{4}{3}\pi r^3$$

يعنې

$$\boxed{V=\frac{4}{3}\pi r^3}$$

د کرې مساحت د تاکلو لپاره بايد $\frac{dy}{dx}$ تشخيص کړو:

$$y=\sqrt{r^2-x^2}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{-2x}{2\sqrt{r^2-x^2}}=\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

په دې اساس د کرې سطحې مساحت په لاندې توګه شمېرل کيږي:

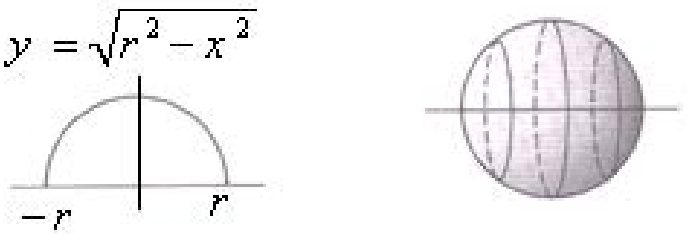
$$S=2\pi\int_{-r}^{r}y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx=2\pi\int_{-r}^{r}y\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)^2}dx=2\pi\int_{-r}^{r}y\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}dx$$

$$=2\pi\int_{-r}^{r}y\sqrt{\frac{r^2}{r^2-x^2}}dx=2\pi r\int_{-r}^{r}\frac{y}{\sqrt{r^2-x^2}}dx=2\pi r\int_{-r}^{r}\frac{\sqrt{r^2-x^2}}{\sqrt{r^2-x^2}}dx=2\pi r\int_{-r}^{r}dx$$

$$=2\pi r\left[x\right]_{-r}^{r}=2\pi r\left[r-(-r)\right]=4\pi r^2$$

نو ځکه د کرې سطحې مساحت عبارت دی له:

$$\boxed{S=4\pi r^2}$$



12.18 شکل

10 **مثال(د اليپسوئيد حجم شمېرل):** د هغه جسم حجم چې د x محور په شاوخوا د $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ بيضوي له دوران څخه منځته راځي(12.19 شکل) په لاندې توګه شمېرل کيږي.

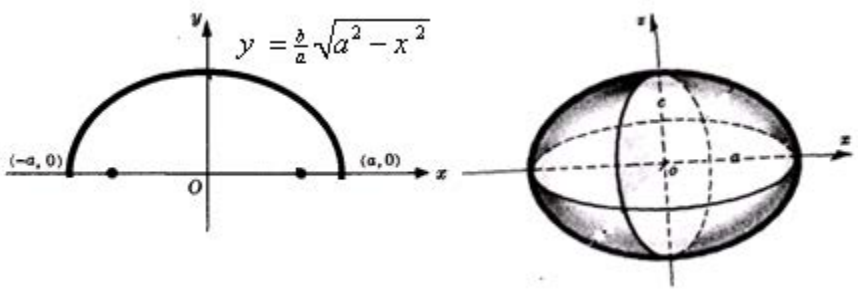
$$\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2}\Rightarrow\frac{y^2}{b^2}=\frac{a^2-x^2}{a^2}\Rightarrow y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$$

نو غوښتل شوی حجم عبارت دی له:

$$V=\pi\int_{-a}^{a}y^2dx=2\pi\int_{0}^{a}y^2dx=2\pi\int_{0}^{a}\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)dx=2\pi\frac{b^2}{a^2}\int_{0}^{a}(a^2-x^2)dx$$

$$=2\pi\frac{b^2}{a^2}\left[a^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^a=2\pi\frac{b^2}{a^2}\left(a^3-\frac{a^3}{3}\right)=2\pi\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{2a^3}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi ab^2.$$

$$\boxed{V=\frac{4}{3}\pi ab^2}$$



12.19 شکل

د منحني ګانو د طول شمېرل: د $y=f(x)$ منحني طول چې د دوو $x=a$ تا $x=b$ نقطو ترمنځ چاپېروي، عبارت دی له:

$$\boxed{l=\overline{AB}=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx}$$

11 **مثال:** د $x^2+y^2=r^2$ دايرې د محيط طول وشمېرئ.

حل: د آسانۍ لپاره د دايرې يوه ربع(څلورمه برخه) په پام کې نيسو، له دې چې $y=\sqrt{r^2-x^2}$ دی او x له0څخه تر r پورې بدلون مومي، نو د دايرې د محيط څلورمې برخې طول عبارت دی له:

$$\frac{C}{4}=\int_0^r\sqrt{1+y'^2}dx=\int_0^r\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}dx=\int_0^r\frac{rdx}{\sqrt{r^2-x^2}}=r\arcsin\frac{x}{r}\Big|_0^r=r\frac{\pi}{2}\quad\frac{C}{4}=\frac{\pi}{2}r$$

او د دايرې د محيط طول عبارت دی له: $\boxed{C=2\pi r}$

12.11 د څپرکي لنډيز

لومړنۍ تابع: $F(x)$ تابع په $[a,b]$ انتروال کې د $f(x)$ تابع لومړنۍ تابع نومیږي، که چېرې د یاد انتروال په ټولو نقطو کې $F'(x)=f(x)$ وي.

متمادي تابع بینهایت لومړنۍ تابع ګاني لري داسې چې د دوو لومړنیو توابعو تفاوت یې یو ثابت عدد وي.

غیر معین انتګرال: $F'=f \Rightarrow \int f(x)\,dx = F(x)+C$

د غیر معین انتګرالونو لومړني ځانګړنې: د C او k ثابت اعدادو او f او g توابعو لپاره لرو چې:

$i.\ \ \frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right)=f(x)$

$ii.\ \ d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)dx$

$iii.\ \ \int dF(x)=F(x)+C$

$iv.\ \ \int 0\,dx = C$

$v.\ \ \int k\,dx = kx + C$

$vi.\ \ \int k\,f(x)dx = k\int f(x)dx$

$vii.\ \ \int\left[f(x)\pm g(x)\right]dx=\int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

د انتګرال نیونې تعویضي طریقه: $\int F_g'(g(x))\,g'(x)\,dx = F(g(x)) + C$

مثالاتي تعویضونه

افاده	د متحول تعویض	د افادې تعویض
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x=a\sin\theta$	$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}=a\cos\theta$
$\sqrt{x^2+a^2}$	$x=a\tan\theta$	$\sqrt{x^2+a^2}=\sqrt{a^2+a^2\tan^2\theta}=a\sec\theta$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x=a\sec\theta$	$\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{a^2\sec^2\theta-a^2}=a\tan\theta$

په انقسام طریقه انتګرال نیونه: $\int u\,v'\,dx = u\,v - \int u'v\,dx \ \vee\ \int u\,dv = u\,v - \int v\,du$

د تحویل فورمولونه چې $n \geq 2$ یو طبیعي عدد وي، نو

$$\int \sin^n x\,dx = -\tfrac{1}{n}\cos x\,\sin^{n-1}x + \tfrac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}x\,dx$$

$$\int \cos^n x\,dx = \tfrac{1}{n}\sin x\,\cos^{n-1}x + \tfrac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}x\,dx$$

د طاقت توابعو مثلثاتي انتګرالونه: دا ډول انتګرالونه $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$ شکل لري، چې پکې m او n غیر منفي تام اعداد دي، په یادو انتګرالونو کې لاندې مثلثاتي فورمولونه کاربرې.

$$\sin^2 x = \tfrac{1}{2}(1-\cos 2x) \quad , \quad \cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1+\cos 2x)$$

$$\int \sin mx \sin nx\, dx \quad , \quad \int \cos mx \cos nx\, dx \quad , \int \sin mx \cos nx\, dx \text{ ،}$$

$$\sin A \sin B = \tfrac{1}{2}[\cos(A-B)-\cos(A+B)]$$

$$\cos A \cos B = \tfrac{1}{2}[\cos(A-B)+\cos(A+B)]$$

$$\sin A \cos B = \tfrac{1}{2}[\sin(A-B)+\sin(A+B)]$$

معین انتګرالونه:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = \lim_{n\to\infty}\left[f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \cdots f(c_n)\Delta x_n\right]$$

1. که f تابع په $[a\ ,\ b]$ کې متمادي وي، په دې انتروال کې انتګرال منونکې هم ده.
2. که f متمادي وي او په $[a\ ,\ b]$ انتروال کې $f(x) \geq 0$ وي، نو د f تابع ګراف او x محور ترمنځ له a څخه تر b پورې چاپېر شوی مساحت عبارت دی له:

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

د معین انتګرال ځانګړتیاوې: د f ، g متمادي توابعو او k ثابت عدد لپاره لرو چې:

$$I \quad \int_a^b k\,dx = k\,(b-a)$$

$$II. \quad \int_a^b f\,(x)\,dx = -\int_b^a f\,(x)\,dx \;\; , \; a > b$$

$$III. \quad \int_a^a f\,(x)\,dx = 0$$

$$IV. \quad \int_a^b kf\,(x)\,dx = k\int_a^b f\,(x)\,dx \quad , \quad k = const.$$

$$V. \quad \int_a^b \left[f\,(x) \pm g\,(x)\right] dx = \int_a^b f\,(x)\,dx \pm \int_a^b g\,(x)\,dx$$

$$VI. \quad \int_a^b f\,(x)\,dx = \int_a^c f\,(x)\,dx + \int_c^b f\,(x)\,dx \;\; , \quad a < b < c$$

$$VII. \quad m \le f\,(x) \le M \Rightarrow m\,(b-a) \le \int_a^b f\,(x)\,dx \le M\,(b-a)$$

$$VIII. \quad f\,(x) \ge 0, x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f\,(x)\,dx \ge 0$$

$$IX. \quad f\,(x) \ge g\,(x), x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f\,(x)\,dx \ge \int_a^b g\,(x)\,dx$$

$$X. \quad \int_a^b f\,(x)\,dx = F\,(x)\Big|_a^b = F\,(b) - F\,(a) \quad , \quad F'(x) = f\,(x)$$

په $[a\,,\,b]$ انتروال کې د دوراني جسم د سطح او حجم شمېرل:

$$S = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \quad , \quad V = \pi\int_a^b \left[f\,(x)\right]^2 dx$$

په $[a\,,\,b]$ انتروال کې د منحني طول شمېرل:

$$l \;=\; \overline{AB} \;=\; \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

تمرين 12.12

1. $\int\left(3x^2+2x+1\right)dx$, 2. $\int\left(\frac{3}{x^2}+2x^{\frac{3}{2}}-1\right)dx$, 3. $\int\left(\frac{2}{x^{\frac{3}{4}}}-\frac{3}{x^{\frac{2}{3}}}\right)dx$

4. $\int\left(2x\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$, 5. $\int\frac{1}{(x-10)^7}dx$, 6. $\int\frac{2x^4-3x^2+5}{7x^2}dx$

7. $\int\left(5\cos 10x-10\sin 5x\right)dx$, 8. $\int\frac{1}{(3z+10)^7}dx$, 9. $\int\frac{3}{\sqrt{(x-1)^3}}dx$

10. $\int(x+5)^8dx$, 11. $\int(4-3x)^7dx$, 12. $\int\sin(6x+3)dx$

13. $\int x\sqrt{x^2-1}\,dx$, 14. $\int x^3\sqrt{x^4+2}\,dx$, 15. $\int\frac{x^2dx}{(x^3+5)^4}$

16. $\int\cos^3 x\,\sin x\,dx$, 17. $\int\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$, 18. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$

19. $\int\frac{t\,dt}{\sqrt{2t^2+1}}$, 20. $\int y^2\sqrt[3]{2-4y^3}dy$, 21. $\int x\,e^{2x}dx$, 22. $\int x\cos 3x\,dx$

23. $\int(\ln t)^2dt$, 24. $\int x^2\arctan x\,dx$, 25. $\int t^2\sin t\,dt$, 26. $\int x\,\ln x\,dx$

27. $\int\sin^2\theta\,d\theta$, 28. $\int\ln\left(1+x^2\right)dx$, 29. $\int x^2\sinh x\,dx$, 30. $\int\frac{x^2}{x+1}dx$

31. $\int\frac{dx}{x^3+4x}$, 32. $\int\frac{x-1}{x+1}dx$, 33. $\int\frac{x^2}{(x+2)^3}dx$, 34. $\int\frac{1}{x^3+x}dx$

35. $\int\frac{x^2dx}{x^4-1}$, 36. $\int\frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$, 37. $\int\frac{x^3dx}{x^2+x-6}$, 38. $\int\frac{2x-4}{x^2-x}dx$

39. $\int_0^1\left(1-x^2\right)^3dx$, 40. $\int_0^2\frac{dt}{(3-2t)^2}$, 41. $\int_0^2x^2\sqrt{9-x^3}dx$

د معين انتګرال د تعريف په کارولو سره وښيئ چې:

42. $\int_a^b Cdx=C(b-a)$, 43. $\int_0^5 xdx=\frac{25}{2}$, 44. $\int_1^3 x^3dx=20$

د معين انتګرال اساسي قضيې په پام کې نيول سره وښيئ چې:

45. $\int_{-1}^{1}(2x^2-x^3)dx=\frac{4}{3}$ ، 46. $\int_{1}^{4}\frac{dx}{\sqrt{x}}=2$ ، 47. $\int_{-6}^{-10}\frac{dx}{x+2}=\ln 2$

48. $\int_{-2}^{2}\frac{dx}{x^2+4}=\frac{1}{4}\pi$ ، 49. $\int_{1}^{2}\frac{dx}{x^2-9}=\frac{1}{6}\ln(0.1)$ ، 50. $\int_{1}^{e}\ln x dx=1$

51 . د هغې سطحې مساحت وشمېرئ چې د $y=x^2$ منحني، x محور او $x=1$ او $x=3$ مستقيمونو ترمنځ راچاپير شوې وي.

52. د $y=4x-x^2$ پارابول او x محور ترمنځ چاپېر سطحې مساحت وشمېرئ.

53. د $y=x^2-4$ او $y=4-x^2$ منحني ګانو ترمنځ چاپېر سطحو مساحت وشمېرئ.

54. د $y=x^2-2x, y=6x-x^2$ منحني ګانو ترمنځ چاپېر سطحې مساحت وټاکئ.

55.. د هغې سطحې مساحت چې د $y=x^2, y=\sqrt{x}$ منحني ګانو پواسطه چاپېر وي ترلاسه کړئ.

56. له $x=0$ څخه تر $x=5$ پورې، د $y=x^{3/2}$ منحني طول وشمېرئ.

57. له $x=2$ څخه تر $x=4$ پورې، د $24xy=x^4+48$ منحني طول وشمېرئ.

58. د هغه جسم حجم وشمېرئ چې په $[0,\pi]$ انټروال کې د $y=\sin x$ ګراف له دوران څخه منځته راغلی وی.

59. د هغه جسم حجم ترلاسه کړئ چې په $[0,h]$ انټروال کې د x محور په شاوخوا د $y^2=\frac{r^2x}{h}$ پارابوالا له دوران څخه منځته راغلی وي.

60. د مخروط حجم وشمېرئ، چې په $[0,r]$ انټروال کې د x محور په شاوخوا د $y=x$ مستقيم له دوران څخه مجسم شوی وي.

61. د استوانې حجم ترلاسه کړئ، چې په $[0,h]$ انټروال کې د $y=r$ خط له دوران څخه مجسم شوی وي.

ديارلسم څپرکی
مخروطي مقاطع

مخروطي مقاطع د تحليلي هندسې مهمه برخه ده، چې د فزيک، انجنيرۍ، ځمکپوهنې او دې ته ورته څانګو په پېښو او مسايلو کې ډېر کاريږي. د دې څپرکي اصلي بحث دوې خواوې احتوا کوي، د يوې دوه مجهوله معين معادلې د ګراف رسمول او بالعکس له يوه ټاکلي ګراف څخه د اړونده معادلې ترلاسه کول. دلته په دې موضوعاتو لنډ نظر اچوو.

13.1 د مخروطي مقاطع پېژندنه

د مخروطي مقاطع د مطالعې طريقې: د مخروطي مقاطع بحث په دوو طريقو مطرح کيږي:

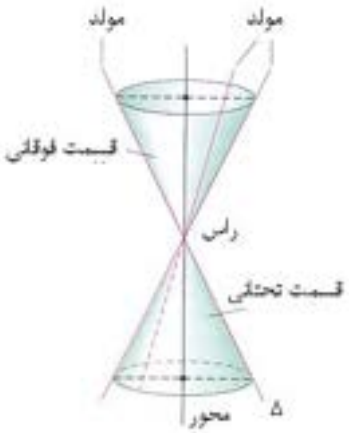
لومړۍ طريقه: په لومړۍ طريقه کې مخروطي مقاطع د نقطو هغه هندسي ځای په توګه تعريغيږي چې له يوې ټاکلې نقطې(محراق) او يوه مستقيم خط څخه يې د واټن نسبت(عن المرکزيت) يو مثبت عدد وي. د عن المرکزيت د مقدار له بدلون څخه منحني په پارابول، بيضوي او هايپربول اوړي او اړونده معادلې يې ترې ترلاسه کيږي.

دويمه طريقه: په دې طريقه کې هر يو منحني د خپلو ځانګړنو پر مبنا تعريفيږي او د اړونده ځانګړنو په ذريعه يې معادلې ترلاسه کيږي او د موضوع تعقيب په صورت کې عن المرکزيت، محراق او هادي مفاهيم په هر يوه کې ټاکل او تشخيص کيږي، عن المرکزيت او هادي په قطبي مختصاتو کې ښه مطرح کېدای شي.

په دې څپرکي کې دويمه طريقه ټاکل شوې، يعنې هر منحني په بېل، بېل ډول تعريفيږي او په اخر کې د قطبي مختصاتو سيستم په مرسته د عن المرکزيت او هادی مفاهيم په هر يوه کې يې تحليل کيږي.

د مخروطي مقاطع منشا: که چېرې D مستقيم خط د يوې ټاکلې دايرې له مرکزه تېر شوی وي او په اړونده مستوي يې عمود وي او Δ مستقيم خط لومړنی خط په V نقطه کې قطع او په اړونده دايره مماس وي، د دايرې په محيط د مستقيم خط له حرکت څخه چې کوم شکل منځته راځي د مخروط په نامه يادېږي.

D مستقيم خط ته د مخروط محور، Δ مستقيم خط ته يې مولد او V نقطې ته يې راس وايي. مخروط له يوه مستوي سره په بېلابېلو حالاتو کې بېلابېلې منحني ګانې منځته راوړي چې د مخروطي مقاطع په نامه يادېږي(13.1 شکل).



13.1 شکل

د مخروطي مقاطع منحني ګانو ډولونه: د مستوي او مخروط له تقاطع څخه لاندې منحني ګان منځته راځي:

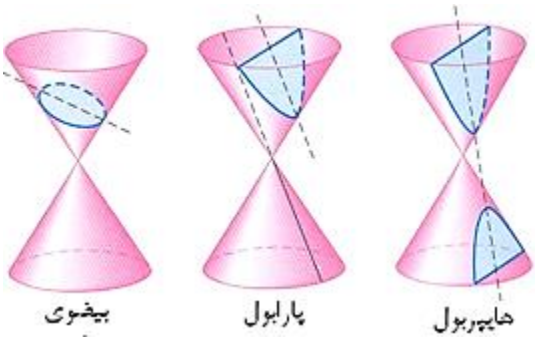
که چېرې قاطع مستوي د مخروط محور قطع کړي مخروطي مقاطع بیضوي نومیږي،

که چېرې قاطع مستوي په محور عمود وي مخروطي مقاطع دایره ده(د بیضوي ځانګړی حالت).

که چېرې قاطع مستوي د مخروط له محور سره موازي وي، د مستوي دواړې خواوې په متناظره توګه قطع کوي نو په دې حالت کې ترلاسه شوې مخروطي مقاطع ها ییږبول نومیږي.

که قاطع مستوي د مخروط له یوه مؤلد سره موازي وي، نو یوازې د مخروط یوه برخه قطع کیږي او یاده مخروطي مقاطع پارابول نومیږي(13.2 شکل).

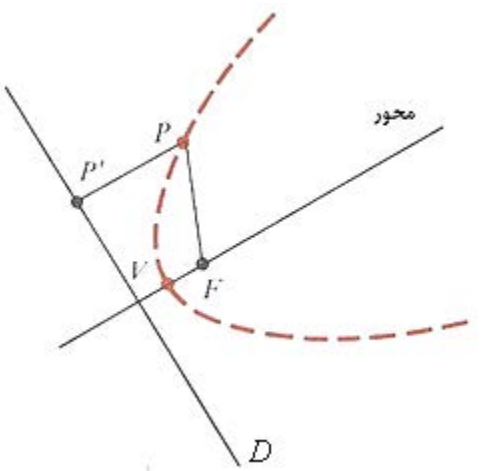
له مستوي سربیره، کولی شو مخروط داسې قطع کړو چې د مخروط له راس څخه تېر شي چې لاندې درې حالتونه ممکن دي: که د مخروط دواړې خواوې داسې قطع کړو چې له راس څخه تېر شي، ترلاسه شوی شکل دوه متقاطع خطونه دي. ممکن مستوي له راس څخه داسې تېره شي چې له مخروط سره مماس وي(یو مؤلد په برکې ولري) په دې صورت کې ترلاسه شوی شکل یو مستقیم خط دی او بالاخره امکان لري مستوي مخروط په یوه نقطه(د راس نقطه) کې قطع کړي په دې صورت کې له تقاطع څخه ترلاسه شوی شکل یوازې یوه نقطه ده.



13.2 شکل

13.2 پارابولا

په مستوي کې د نقطو هغه هندسي سیمه چې له یوې ټاکلې شوې نقطې(F) او یو ټاکلي مستقیم خط(D) څخه مساوي واټن ولري؛ پارابولا نومیږي. په بل عبارت د مستوي نقطو هغه سیټ چې له ټاکلي مستقیم خط او یوې ټاکلې نقطې څخه د واټنونو نسبت یې ثابت او مساوي په یو وي، پارابولا نومیږي(13.3 شکل). دلته F نقطه د پارابولا محراق او D مستقیم خط یې هادي نومیږي.

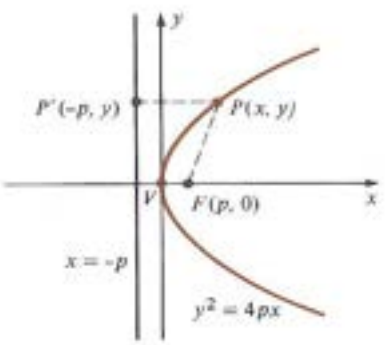


13.3 شکل

د پارابولا معادله: د یوې ساده معادلې د ترلاسه کولو لپاره x محور داسې په پام کې نیسو چې له F محراق څخه تېر شوی او له D هادي سره عمودي وي، د هادي او محراق ترمنځ منځنۍ سیمه کې y محور رسموو(13.3 شکل). که د محراق مختصات $(p\ ,\ 0)$ فرض شي، طبیعي خبره ده چې د هادي معادله مساوي کیږي په $x=-p$ او په دې اساس د مختصاتو پیل د پارابولا هغه نقطه ده چې د راس په نامه یې یادیږي.

کـه چېرې $P(x, y)$ د پـارابولا يـوه نقطـه وي، نـو لـه F محـراق او D هـادي څخـه متسـاوي الفاصله ده، يعنې

$$PP' = PF$$



13.4 شکل

لـــه دې چـــې $PF = \sqrt{(x-p)^2+(y-0)^2}$ او $PP' = \sqrt{(x+p)^2+(y-y)^2}$ دي، پـــه دې اساس

$$\sqrt{(x-p)^2+(y-0)^2} = \sqrt{(x+p)^2+(y-y)^2}$$

د دواړو خواوو له مربع کولو څخه تر لاسه کوو چې:

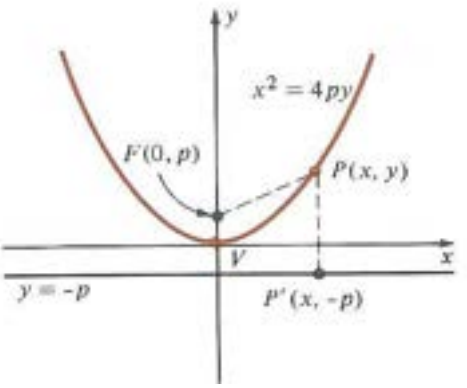
$$(x-p)+(y-0)^2 = (x+p)^2+(y-y)^2$$
$$\Rightarrow x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2$$
$$y^2 = 4px$$

له دې ځايه لرو چې:

له دې معادلې څخه ليدل کيږي چې منحني x محور ته په کتو متناظر ده. کـه چېرې $p > 0$ وي پارابولا ښي لور ته(13.4 شکل) او د $p < 0$ په صورت کې کيڼ لور ته خلاصيږي. پـه ورتـه ډول هغه پارابولا چې محراق يې پـه y محـور پـروت وي او راس يې پـه مبدا(پيل) واقـع وي اړونده معادله يې لاندې شکل لري.

$$x^2 = 4py$$

پـه دې حالت کې، $p > 0$ لپاره د پارابولا خوله پاس لور ته(13.5 شکل) او د $p < 0$ لپاره لاندې خوا ته خلاصيږي.



13.5 شکل

پايله: د لاندې هر يوې معادلې ګراف هغه پارابولا راکوي چې راس يې د مختصاتو مبدا وي، محراق او هادي يې له معادلې ترلاسه کيږي:

د پارابولا معادله	د پارابولا محراق	د پارابولا هادي	د پارابولا د محور حالات
$y^2 = 4px$	$F(p\ ,\ 0)$	$x = -p$	افقي
$x^2 = 4py$	$F(0\ ,\ p)$	$y = -p$	عمودي

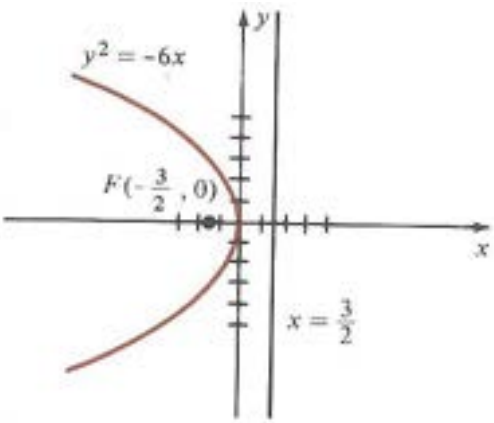
د پارابولا معياري وتر: هغه وتر چې د پارابول له محراق څخه تېر او د تناظر په محور عمود وي، د پارابولا معياري وسعت (*latus rectum*) يا عمود محراقي وتر نومېږي. د $x = p$ لپاره کولی شو د پارابولا له معادلې څخه د y قيمت وټاکو چې د معياري وتر له نيمايي سره يې مساوي دی، يعنې

$$y^2 = 4px \overset{x=p}{\Rightarrow} {y_F}^2 = 4p^2 \Rightarrow y_F = 2p$$

په دې اساس $y_F = 2p$ د $2y_F = 4p$ معياري وتر د طول په نتيجه کې ترلاسه شوی.

1 مثال: د $y^2 = -6x$ پارابولا محراق او هادي وټاکئ او اړونده ګراف يې هم رسم کړئ.

حل. د پارابولا حالت افقي دی او $4p = -6$ نو $p = -\frac{3}{2}$ په دې اساس پارابولا کېنۍ لور ته خلاصيږي، محراق يې $F\left(-\frac{3}{2}\ ,\ 0\right)$ او هادي يې مساوي په $x = \frac{3}{2}$ دی(13.6 شکل).

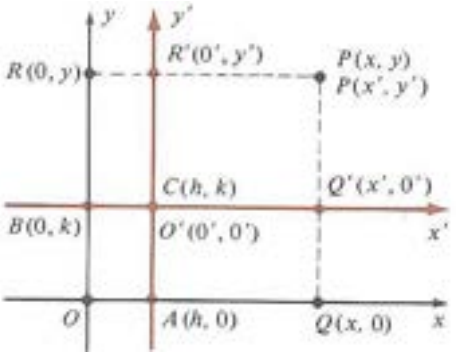


13.6 شکل

د مختصات محورونو لېږد: که چېرې د مختصاتو محورونه داسې ولېږدول شي چې مبدا نظر لومړي سیستم ته په $(h\ ,\ k)$ نقطه کې موقعیت ولري، په دې صورت کې د لومړي سیستم (xy) او دویم سیستم $(x'y')$ اړیکې په لاندې توګه دي:

$$(i)\quad x = x' + h \quad , \quad y = y' + k$$

$$(ii)\quad x' = x - h \quad , \quad y' = y - k$$

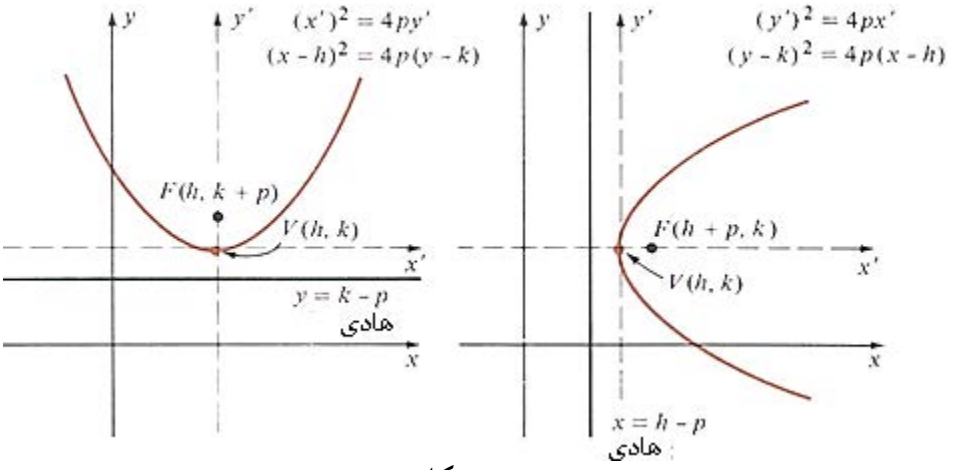


13.7 شکل

اوس کولی شو هر ډول ګراف د یوه مناسب لېږد په پام کې نیولو سره په عمومي توګه مطرح کړو.

د پارابولا عمومي حالات: که چېرې د پارابولا راس (h,k) نقطه وي، په مخکینیو معادلو کې د x او y په ځای په ترتیب $x-h$ او $y-k$ وضع کوو او د لاندې جدول پایلې ترلاسه کوو.

د پارابولا معادله	د پارابولا محراق	د پارابولا هادي	د پارابولا د محور حالات
$(y-k)^2 = 4p(x-h)$	$F(h+p\ ,\ k)$	$x = h-p$	افقي
$(x-h)^2 = 4p(y-k)$	$F(h\ ,k+p)$	$y = k-p$	عمودي



13.8 شکل

که د پارابولا معادلې ته انکشاف ورکړو، د لاندو حالاتو څخه یو غوره کوي:

$$x = Ay^2 + By + C \quad \cdots \quad (i)$$

$$y = Ax^2 + Bx + C \quad \cdots \quad (ii)$$

پورته لومړۍ اړیکه له افقي محور سره د پارابولا حالت او دویمه اړیکه له عمودي محور سره د پارابولا حالت ښیي.

مثال: د $y = 2x^2 - 6x + 4$ ګراف تشخیص او رسم کړئ.

حل. د دې معادلې ګراف په عمودي محور د پارابولا ګراف دی چې معادله یې په معیاري حالت لیکو:

$$y = 2x^2 - 6x + 4 \Rightarrow 2x^2 - 6x + 4 = y \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = \tfrac{1}{2}y$$

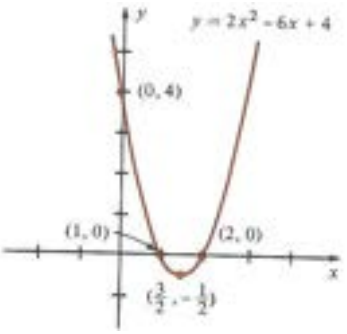
$$\Rightarrow x^2 - 3x + \left(\tfrac{3}{2}\right)^2 + 2 = \tfrac{1}{2}y + \left(\tfrac{3}{2}\right)^2 \Rightarrow \left(x - \tfrac{3}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{2}y + \left(\tfrac{3}{2}\right)^2 - 2$$

$$\Rightarrow \left(x - \tfrac{3}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{2}y + \tfrac{9}{4} - 2 \Rightarrow \left(x - \tfrac{3}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{4}$$

په دې اساس د معادلې معیاري حالت عبارت دی له:

$$\left(x - \tfrac{3}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{2}\left(y + \tfrac{1}{2}\right)$$

نو د پارابولا راس $\left(\tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2}\right)$ نقطه ده، یعنې $h = \tfrac{3}{2}$ او $k = -\tfrac{1}{2}$ دي. له پاسینۍ معادلې لیدل کیږي چې $4p = \tfrac{1}{2}$ په دې اساس $p = \tfrac{1}{8}$ ، په نتیجه کې د پارابولا محراق مساوي کیږي په $F\left(h, k + p\right)$ یعنې $F\left(\tfrac{3}{2}, -\tfrac{3}{8}\right)$.



13.9 شکل

3 **مثال:** $2x = y^2 + 8y + 22$ ګراف تشخيص او رسم کړئ.

حل. د دې معادلې ګراف هم په افقي محور د يوه پارابولا ګراف دی، نو هغه په معياري حالت ليکو:

$$2x = y^2 + 8y + 22 \Rightarrow y^2 + 8y + 22 = 2x \Rightarrow y^2 + 8y = 2x - 22$$

$$\Rightarrow y^2 + 8y + 16 = 2x - 22 + 16 \Rightarrow (y + 4)^2 = 2x - 6$$

په دې اساس د معادلې معياري حالت عبارت دی له:

$$(y + 4)^2 = 2(x - 3)$$

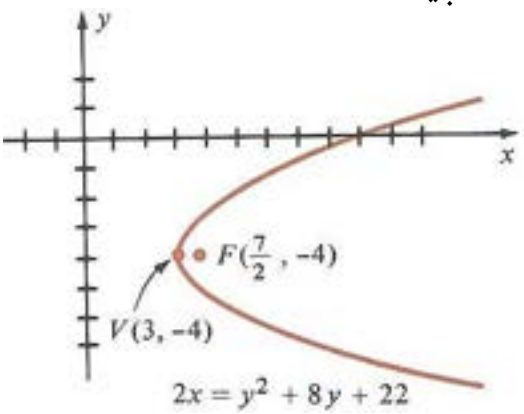
نو $h = 3$ ، $k = -4$ او $4p = 2$ يعنې $p = \frac{1}{2} > 0$ او د پارابولا خوله ښي لور ته خلاصيږي چې پکې

$$F(h + p, k) \equiv F\left(3 + \tfrac{1}{2}, -4\right) \equiv F\left(\tfrac{7}{2}, -4\right)$$

يعنې محراق يې $F\left(\frac{7}{2}, -4\right)$ دی او د هادي معادله يې په لاندې توګه ده

$$x = h - p \Rightarrow x = 3 - \tfrac{1}{2} \Rightarrow x = \tfrac{5}{2}$$

د هادي معادله $x = \frac{5}{2}$ ترلاسه کيږي.



13.10 شکل

4 **مثال:** د پارابولا معادله وليکئ چې راس يې $(4,-1)$ وي، محور يې y محور سره موازي وي او د مختصاتو له مبدا څخه تېر شي.

حل. واضح ده چې د دې پارابولا معادله عبارت ده له:

$$(x-4)^2 = 4p(y+1)$$

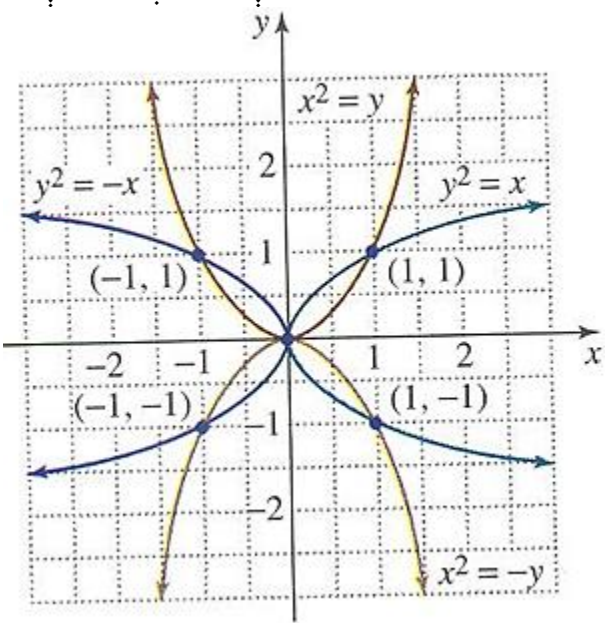
له دې چې منحني له مبدا تېريږي ، نو بايد $(0,0)$ نقطه صدق کړي، په دې اساس کولی شو وليکو

$$\left.\begin{matrix}(x-4)^2 = 4p(y+1)\\ x=0 \quad , \quad y=0\end{matrix}\right\} \Rightarrow (0-4)^2 = 4p(0+1) \Rightarrow 16 = 4p \Rightarrow p = 4$$

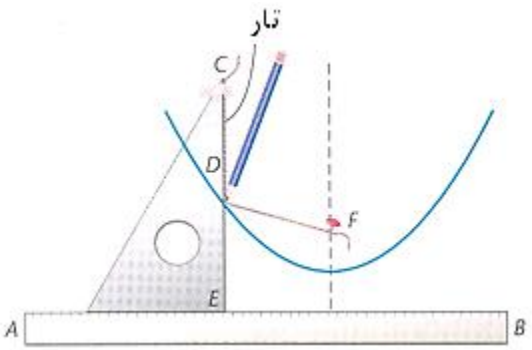
او $p = 4$ وټاکل شو. په پايله کې غوښتل شوې معادله عبارت ده له:

$$(x-4)^2 = 16(y+1)$$

5 **مثال:** څلور $y^2 = \pm x$ او $x^2 = \pm y$ پارابولا ګانې په لاندې شکل کې رسم شوي:

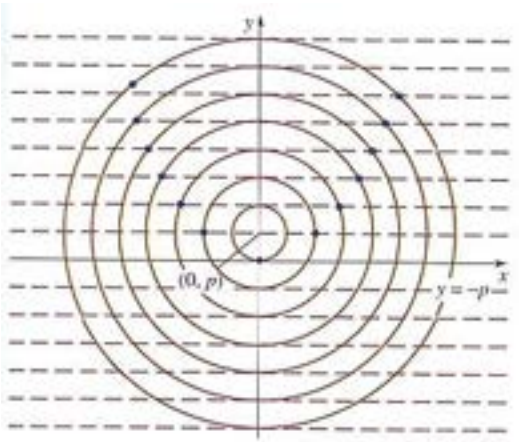


د پارابولا عملي رسمول: د يوه تار چې طول يې د قائم الزاويه مثلث (ګونيا) د قائم ضلعې له طول سره مساوي دی، يو سر د پارابول په محراقي نقطه کې او دويم سر يې د مثلث په راس د شکل مطابق ونښلوو ، د مثلث دويمه ضلع د خط کش له څنډې سره چې د هادي پرمخ پروت دی، تماس لري، که چېرې د پنسل څوکه د تار ترمنځ د شکل مطابق د ګونيا انتقالي حرکت سره سم بدلون ومومي، محراق او هادي درلودونکی پارابولا رسميږي(13.12 شکل).



13.12 شکل تار

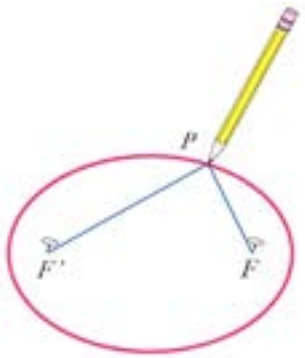
د پارابولا نقطوي رسمول: د $x^2 = 4py$ پارابولا د رسمولو لپاره متحدالمرکزه دايرې چې مرکز يې $(0\ ,\ p)$ او شعاعوې يې په ترتيب $r = p$ ، $r = 2p$ ، $r = 3p$ او ... وي رسموو، د دغې دايرو مشترک نقطې په ترتيب د $y = 0$ ، $y = p$ ، $y = 2p$ او ... موازي خطونو سره يوځای د غوښتل شوې پارابولا پرمخ پرتې دي(13.11 شکل).



13.11 شکل

13.3 بيضوي

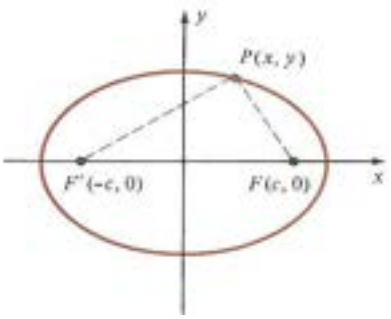
په مستوي کې د نقطو هغه سيټ ته چې له دوو نقطو څخه يې د واټنونو مجموع له يوه ثابت عدد سره مساوي وي، بيضوي ويل کيږي. دوو نقطو ته د بيضوي محراقونو تاکونکي وايي(13.13 شکل).



13.13 شکل

د بيضوي معادله: کـه چېـرې $F(c,0)$ او $F'(-c,0)$ نقطـې د بيضـوي محراقونـه او $P(x,y)$ يـې اختياري نقطه وي(لاندې شکل)، د a ثابت عدد لپاره داسې چې $a>c$ وي، (13.14 شکل)، نو د تعريف له مخې لرو چې:

$$d(P,F)+d(P,F')=2a$$



13.14 شکل

د دوو نقطو ترمنځ د فاصلې فورمول له مخې لرو چې:

$$\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}=2a$$

يا:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

د وروستۍ اړيکې دواړې خواوې مربع کوو او لرو چې:

$$x^2-2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+x^2+2cx+c^2+y^2$$

له دې ځايه ترلاسه کوو چې

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2+cx$$

د وروستۍ اړيکې له مربع کولو او اړين اختصاراتو وروسته لرو چې:

$$x^2(a^2-c^2)+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

له دې چې $a>c$ دی، نو کولی شو $a^2-c^2=b^2$ وضع کړو

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

د اړيکې دواړې خواوې په a^2b^2 تقسيموو او پايله ترلاسه کوو چې:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

ښکاره ده چې $a > c$ ، ليدل کيږي چې د x او y توانونه جفت دي، په دې اساس منحني نظر x او y محورونو او مبدا ته متناظره ده.

د بيضوي راس: د بيضوي په معادله کې د $x = 0$ لپاره ، د تقاطع نقطې په y محور تاکل کيږي، يعنې

$$x = 0 \Rightarrow \frac{0^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y^2 = b^2 \Rightarrow y = \pm b$$

په دې اساس په افقي محور د تقاطع نقطې(د بيضوي راسونه) عبارت دي له $B(0, b)$ او $B(0,-b)$ څخه. په همدې توګه له پورته معادلې څخه د $y = 0$ لپاره، د تقاطع نقطې په x محور تاکل کيږي، يعنې

$$y = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{0^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} = 1 \Rightarrow x^2 = a^2 \Rightarrow x = \pm a$$

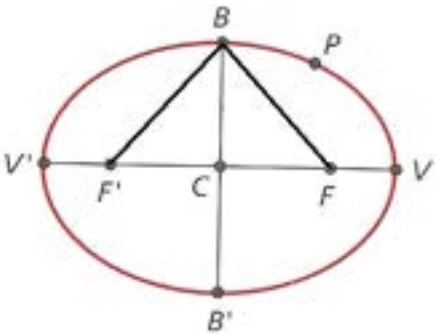
نو په عمودي محور د تقاطع نقطې(د بيضوي راسونه) عبارت دي له $A(a,0)$ او $A'(-a,0)$ څخه.

بيضوي دوه قطرونه لري چې د غټ(اطول)قطر او وړ(اقصر) قطر په نامه يادي او مرکز يې د مبدا نقطه ده. د اطول قطر طول $2a$ ، اقصر قطر طول $2b$ او د محراقونو ترمنځ واټن يې له 2c څخه عبارت دی، ليدل کيږي چې $B(0, b)$ نقطه له دوو محراقونو څخه متساوي الفاصله دي يعنې $BF = BF'$ او له دې چې $BF + BF' = 2a$ دی نو $2BF = 2a$ يا $BF = a$ کيږي. اوس د BCF قائم الزاويه مثلث له مخې(13.15 شکل) د فيثاغورس قضيې مطابق لرو چې:

$$\underset{b^2}{(CB)^2} + \underset{c^2}{(CF)^2} = \underset{a^2}{(BF)^2}$$

په پايله کې

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$



13.15 شکل

د بيضوي عن المرکزيت: $\varepsilon = \frac{c}{a}$ نسبت ته د بيضوي عن المرکزيت (له مرکزه بهر) وايي، عن المرکزيت د بيضوي شکل ټاکي، يعنې هرڅومره چې c ته a نږدې شي، بيضوي دايرې ته ورته والی پيدا کوي او د $c = a$ يعنې $\varepsilon = 1$ لپاره بيضوي په دايره اوړي.

پايله: د $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ معادلې ګراف $a^2 > b^2$ لپاره، يوه بيضوي راکوي چې راسونه يې $(\pm a, 0)$ وي، داسې چې د اقصر قطر پای يې $(0, \pm b)$ او محراقونه يې $(0, \pm c)$ وي، سربيره پر دې $a^2 = b^2 + c^2$ ده.

د بيضوي معياري وسعت: هغه وتر چې د بيضوي له محراقه تېر او په تناظر محور عمودي وي، د بيضوي د معياري وسعت (*latus rectum*) يا عمودي محراقي وتر نومېږي. د بيضوي معادله کې د $x = c$ لپاره کولی شو د y قيمت ترلاسه کړو چې د معياري وتر نيمايي برخه دی يعنې:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \overset{x=c}{\Rightarrow} \frac{c^2}{a^2} + \frac{y_F^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y_F^2}{b^2} = 1 - \frac{c^2}{a^2}$$

$$\Rightarrow \frac{y_F^2}{b^2} = \frac{a^2 - c^2}{a^2} \Rightarrow \frac{y_F^2}{b^2} = \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow \frac{y_F}{b} = \frac{b}{a}$$

په دې اساس $y_F = \frac{b^2}{a}$ او د معياري وتر طول عبارت دی له $2y_F = \frac{2b^2}{a}$ څخه.

1 **مثال:** د لاندې معادلې ګراف تشخيص کړئ.

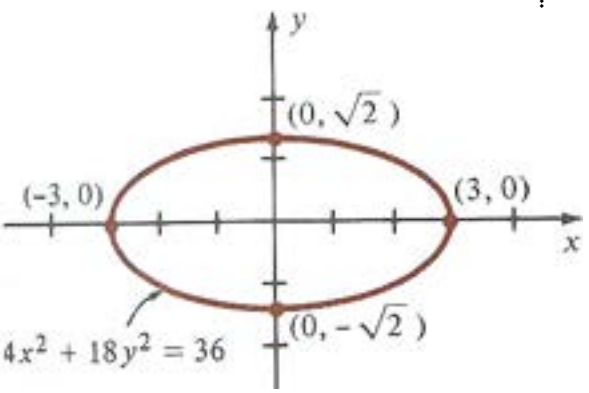
$$4x^2 + 18y^2 = 36$$

حل. د معادلې دواړې خواوې په 36 تقسيمو او ترلاسه کوو چې

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{2} = 1$$

نو ياد ګراف له يوې بيضوي څخه عبارت دی چې پکې $a^2 = 9$ او $b^2 = 2$ يعنې $a = 3$ او $b = \sqrt{2}$ دي په دې اساس د اطول قطر د پای نقطې $(\pm 3, 0)$ او د اقصر قطر د پای نقطې $(0, \pm\sqrt{2})$

دي او $c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 2 = 7 \Rightarrow c = \sqrt{7}$ نو محراقونه يې عبارت دي له $(\pm\sqrt{7}, 0)$ څخه. او ګراف يې په لاندې توګه دی (13.16 شکل).



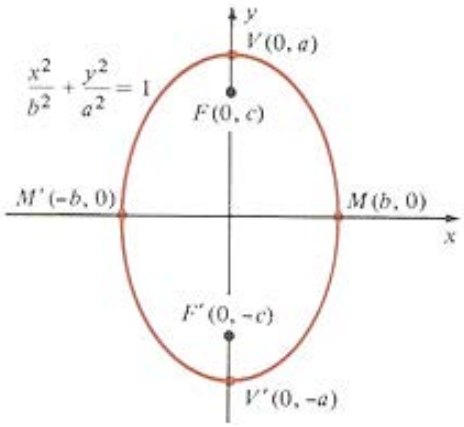
13.16 شکل

مثال: 2 د بيضوي معادله ترلاسه کړئ داسې چې راسونه يې $(\pm 4\ ,\ 0)$ او محراقونه يې $(\pm 2\ ,\ 0)$ وي.

حل: لیدل کیږي چې $a = 4$ او $c = 2$ نو: $b^2 = a^2 - c^2 = 16 - 4 = 12$

په دې اساس غوښتل شوې معادله عبارت ده له: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$

د بيضوي عمودي حالت: که د بيضوي راسونه(د اطول قطر د تقاطع نقطې) د y محور پرمخ وټاکل شي، په دې صورت کې محراقونه عبارت دي له $(0\ ,\pm c)$ څخه. نو د $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ معادلې ګراف هغه بيضوي ده چې پکې $a^2 > b^2$ او راسونه يې $(0\ ,\pm a)$ دي، د اقصر قطر د تقاطع نقطې $(\pm b\ ,\ 0)$ دي او محراقونه يې $(0\ ,\pm c)$ دي، داسې حال کې چې $c^2 = a^2 - b^2$ ده.



13.17 شکل

يادونه: په عمومي توګه د يوې بيضوي معادله چې مرکز يې د مختصاتو مبدا وي لاندې حالت لري:

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=1 \Leftrightarrow qx^2+py^2=pq$$

په دې صورت کې که $p>q$ وي ، بيضوي افقي حالت لري او که $p<q$ وي بيضوي په عمودي حالت کې ده او د $p=q$ لپاره دايروي حالت غوره کوي.

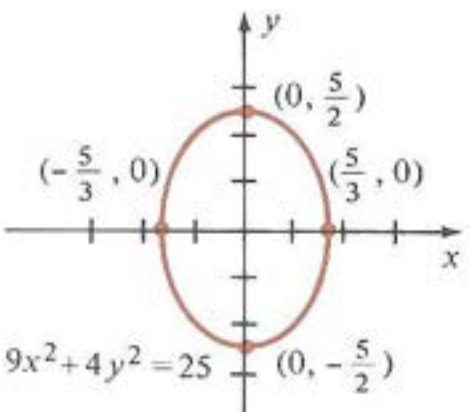
3 **مثال:** د $9x^2+4y^2=25$ معادلې ګراف وټاکئ.

حل. ګراف يې عبارت له هغه بيضوي څخه دی چې مرکز يې د مختصاتو مبدا او محراقونه يې له دوو (x او y) محورونو څخه په يوه پروت دی.

$$y=0 \Rightarrow 9x^2+4\times 0^2=25 \Rightarrow 9x^2=25 \Rightarrow x=\pm\tfrac{5}{3}$$

$$x=0 \Rightarrow 9\times 0^2+4y^2=25 \Rightarrow 4y^2=25 \Rightarrow y=\pm\tfrac{5}{2}$$

نو د x محور پرمخ د تقاطع نقطې عبارت دي له $(\pm\frac{5}{3},0)$ څخه او په y محور د تقاطع نقطې له $(0,\pm\frac{5}{2})$ سره مساوي دي. له دې چې $\frac{5}{3}<\frac{5}{2}$ ده، په دې اساس اطول قطر د عمودي محور پرمخ واقع دی(13.18 شکل).



13.18 شکل

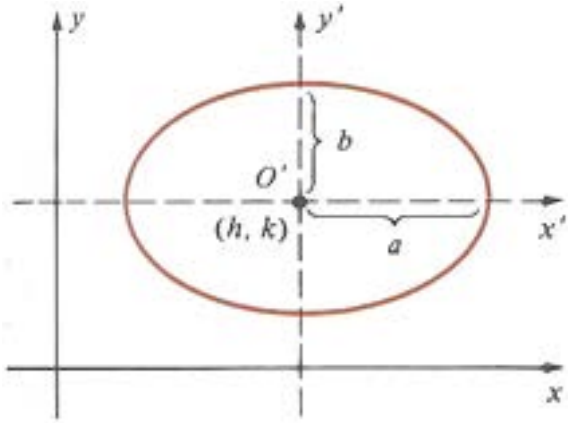
د بيضوي عمومي حالت: د قائم مختصاتي محورونو د ليږدولو په پايله کې داسې چې مبدا $C(h,k)$ نقطې ته نقل شي، کولی شو د بيضوي معادله په عمومي توګه مطرح کړو. د ساري په توګه که په ليږدول شوي سيستم کې د بيضوي معادله

$$\frac{(x')^2}{a^2}+\frac{(y')^2}{b^2}=1$$

وي، په لومړني سيستم کې لومړنی معادله عبارت ده له:

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1}$$

وروستۍ معادله د بيضوي عمومي او معياري(کانوني) حالت ښيي(13.19 شکل).



13.19 شکل

د بيضوي عمومي معادله کولی شو داسې وليکو:

$$\boxed{Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0}$$

داسې چې A او C ضريبونه هم اشاره خو د صفر خلاف وي يعنې $AC>0$.

4 مثال: د لاندې معادلې ګراف رسم کړئ: $16x^2+9y^2+64x-18y-71=0$

حل. معادله په لاندې توګه ليکو: $16(x^2+4x)+9(y^2-2y)=71$

د قوس د ننه افادې تکميل مربع کوو.

$$16(x^2+4x+4-4)+9(y^2-2y+1-1)=71$$

يا:

$$16(x^2+4x+4)-64+9(y^2-2y+1)-9=71$$

يا:

$$16(x^2+4x+4)+9(y^2-2y+1)=71+64+9$$

له دې ځايه لرو چې:

$$16(x+2)^2+9(y-1)^2=144$$

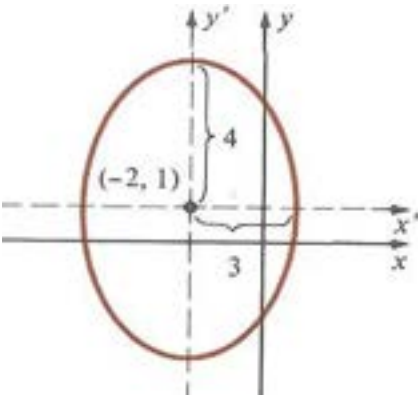
د وروستۍ اړيکې دواړې خواوې په 144 تقسيموو او ترلاسه کوو چې:

$$\frac{(x+2)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{16}=1$$

او دا د بيضوي معادله چې عمودي حالت لري او د $x'=x+2$ او $y'=y-1$ په تعويض سره له لېږدول شوي سيستم څخه لرو چې:

$$\frac{(x')^2}{9}+\frac{(y')^2}{16}=1$$

يعنې په دې حالت کې $h=-2$ او $k=1$ په پام کې نيول کيږي، نو نوې مبدا(د بيضوي مرکز) عبارت ده له $C(-2,1)$ څخه(13.20 شکل)



13.20 شکل

د بیضوي رسمول: دوه میخونه چې له یوه بله $2c$ واټن ولري د یوه مستوي پر مخ په پام کې نیسو، د یوه تار چې $2a$ طول لري، دواړه سرونه په داوړو میخونو ترړو، اوس که د پنسل څوکه متکي په همدې تار او د شکل مطابق د میخونو په شاوخوا وخوځوو، داسې یوه بیضوي رسمیږي چې د اطول قطر طول یې $2a$ او د محراقونو ترمنځ واټن یې مساوي په $2c$ وي(13.21 شکل).



13.21 شکل

د بیضوي مساحت: که چېرې یوه ساحه د داسې یوې بیضوي چې د اطول قطر طول یې $2a$ او د اقصر قطر طول یې $2b$ وي احاطه شوې وي، مساحت یې شمېرو.

حل. د یادې بیضوي معادله یعنې $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ نظر y ته حل کوو:

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

غوښتل شوی مساحت عبارت دی له:

$$A = 4\times\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

د دې انټګرال په شمېرنو کې لاندې تعویض په پام کې نیسو:

$$x = a\sin\theta \Rightarrow \sqrt{a^2 - x^2} = \cos\theta \ , \ dx = a\cos\theta d\theta$$
$$x = 0 \ \Rightarrow \ \theta = 0 \ , \ x = a \ \Rightarrow \ a = a\sin\theta \Rightarrow \theta = \tfrac{\pi}{2}$$

په دې اساس

$$A = 4\left(\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx\right) = 4\left(\frac{b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos^2\theta\, d\theta\right) = 4\left(\frac{b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta\right)$$
$$= 2ab\left[\theta + \tfrac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2ab\left[\tfrac{\pi}{2}\right] = \pi ab$$

نو پايله اخلو چې د بيضوي مساحت عبارت دی له:

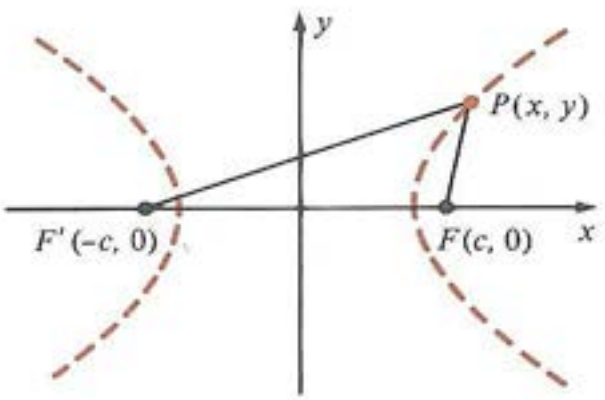
$$\boxed{A = \pi ab}$$

که $a = r = b$ په پام کې ونيول شي، بيضوي په دايره اوړي او مساحت يې مساوي کيږي په:

$$A = \pi r^2$$

13.4 هايپربولا

د مستوي د نقطو هغه هندسي ځای چې له دوو ټاکلو نقطو څخه يې د واټنونو تفاضل، يو مثبت ثابت عدد وي، هايپربولا نومیږي، يادې دوې نقطې د هايپربولا محراقونه نومیږي(13.28 شکل).



13.28 شکل

د هايپربولا معادله: د داسې هايپربولا معادلې د ترلاسه کولو لپاره چې د محراقونو ترمنځ يې واټن 2c ، د هر $P(x,y)$ نقطې او محراقونو ترمنځ د واټن تفاضل يې 2a ، او $F(c,0)$ او $F'(-c,0)$ نقطې يې محراقونه وي، د قائم مختصاتو سيستم داسې په پام کې نيسو چې y افقي محور د هايپربولا پر محور منطبق وي، دشکل په پام کې نيولو سره لرو چې:

$$\left|d(P,F) - d(P,F')\right| = 2a$$

شکل او د دوو نقطو ترمنځ واټن ته په کتو سره

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$

یا:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a+\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

د وروستۍ اړیکې دواړې خواوې مربع کوو نو لاسته راځي چې

$$x^2-2cx+c^2+y^2=4a^2+4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+x^2+2cx+c^2+y^2$$

له اړین اختصار څخه وروسته: $\sqrt{(x+c)^2+y^2}=-cx-a^2$

د دواړو خواوو له مربع کولو او یو شمېر اختصارونو وروسته لرو چې:

$$x^2(c^2-a^2)-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$$

له دې چې $a<c$ دی، نو کولی شو $c^2-a^2=b^2$ وضع کړو په دې اساس

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$$

د وروستۍ اړیکې دواړې خواوې په a^2b^2 تقسیموو او پایله اخلو چې:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$$

لیدل کیږي چې د x او y توانونه جفت دي، په دې اساس منحني نظر x او y محورونو او مبدا ته متناظر دی.

د هایپربولا راس: له معادلې څخه د $x=0$ لپاره، د تقاطع نقطې په y ټاکل کیږي، یعنې

$$x=0\Rightarrow\frac{0^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\Rightarrow\frac{y^2}{b^2}=-1$$

او له دې چې $y^2/b^2=-1$ معادله حل نلري، نو دغه هایپربولا y محور نه قطع کوي. خو د هایپربولا راسونه، په یاده معادله کې د $y=0$ لپاره، په x محور ټاکل کیږي، یعنې

$$y=0\Rightarrow\frac{x^2}{a^2}-\frac{0^2}{b^2}=1\Rightarrow\frac{x^2}{a^2}=1\Rightarrow x^2=a^2\Rightarrow x=\pm a$$

د افقي محور پر مخ د هایپربولا تقاطع نقطې (د هایپربولا راسونه) عبارت دي له $A(a,0)$ او $A'(-a,0)$ څخه.

هایپربولا یو محور لري او مرکز یې د مبدا نقطه ده. د محور طول $2a$ او د محراقونو ترمنځ واټن یې $2c$ دی.

$$\boxed{c^2=a^2+b^2}$$

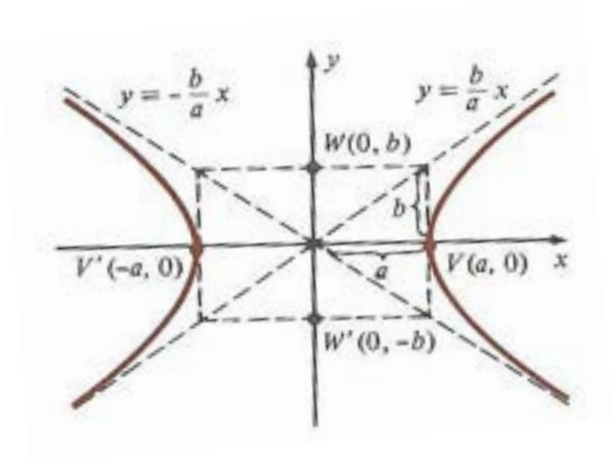
پایله: د $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ معادلې ګراف، یو هایپربولا دی چې راسونه یې $(\pm a\ ,0)$ دي، داسې چې محراقونه یې مساوي په $(\pm c,0)$ دي، سربیره پر دې $c^2=a^2+b^2$

د هايپربولا معياري وسعت: هغه وتر چې د هايپربولا له محراقه تېر او په تناظر محور يې عمود وي، د هايپربولا معياري وسعت (*latus rectum*) يا محراقي عمود وتر نومېږي. د هايپربولا له معادلې څخه د $x=c$ لپاره کولی شو د y قيمت وټاکو چې د معياري وتر د طول له نيمايي سره مساوي دی، يعنې

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \overset{x=c}{\Rightarrow} \frac{c^2}{a^2}-\frac{y_F^{\,2}}{b^2}=1 \Leftrightarrow \frac{c^2}{a^2}-1=\frac{y_F^{\,2}}{b^2} \Rightarrow \frac{c^2-a^2}{a^2}=\frac{y_F^{\,2}}{b^2}$$

$$\Rightarrow \frac{y_F^{\,2}}{b^2}=\frac{c^2-a^2}{a^2} \Rightarrow \frac{y_F^{\,2}}{b^2}=\frac{b^2}{a^2} \Rightarrow \frac{y_F}{b}=\frac{b}{a} \Rightarrow y_F=\frac{b^2}{a}$$

په دې اساس د معياري وتر طول عبارت دی له $2y_F=\frac{2b^2}{a}$ څخه (13.29 شکل).



13.29 شکل

د هايپربولا مجانبونه: که $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ معادله نظر y ته حل شي، لرو چې:

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2 \Rightarrow b^2x^2-a^2b^2=a^2y^2$$

$$a^2y^2=b^2x^2-a^2b^2 \Rightarrow y^2=\frac{b^2x^2-a^2b^2}{a^2}$$

$$\Rightarrow y^2=\frac{b^2x^2}{a^2}\left(1-\frac{a^2}{x^2}\right) \Rightarrow y=\pm\frac{bx}{a}\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}$$

نښکاره ده چې په وروستۍ اړيکه کې بايد $|x|>a$ وي، يعنې په $(-a,a)$ انتروال کې د x لپاره د هايپربولا منحني شتون نلري. په بل عبارت د هايپربولا هره (x,y) نقطه بايد $x>a$ يا $x<-a$ صدق کړي.

او فرضوو چې $y = mx + c$ د $y = \pm\frac{bx}{a}\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}$ منحني، د مايل مجانب معادله وي، نو:

$$m = \lim_{x\to\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\pm\frac{bx}{a}\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}}{x} = \pm\frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}} = \pm\frac{b}{a}$$

په وروستۍ افاده کې د مثبت اشارې په پام کې نیولو سره لرو چې:

$$c = \lim_{x\to\infty}(y - mx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{bx}{a}\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}} - \frac{b}{a}x\right) = \frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-a^2} - x\right)$$

$$= \frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-a^2}-x\right)\left(\sqrt{x^2-a^2}+x\right)}{\sqrt{x^2-a^2}+x} = \frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}\frac{a^2}{x+\sqrt{x^2-a^2}} = 0$$

د منفي اشارې لپآره هم ورته عمل ترسره کوو. نو $m = \pm\frac{b}{a}$ او $c = 0$ ده، د مجانبونو معادله عبارت ده له $y = \pm\frac{b}{a}x$ څخه.

په همدې توګه په $x \to -\infty$ حالت کې پاسيني ليمت ته ورته د دې په پآم کې نيولو سره چې $\lim_{x\to\infty}\frac{|x|}{x} = -1$ کيږي، کولی شو ترلاسه کړو چې د دويم مجانب معادله $y = -\frac{b}{a}x$ ده. يعنې د هايپربولا دوه مجانبونه عبارت دي له:

$$\boxed{y = \pm\frac{b}{a}x}$$

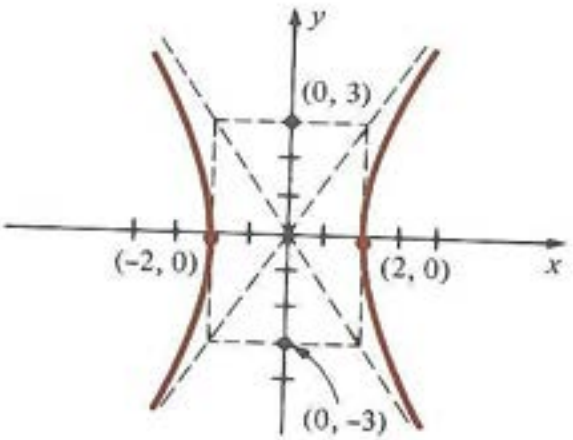
د مجانبونو په مرسته کولی شو هايپربولا په دقت رسم کړو. د مجانبونو رسمولو يوه طريقه دا ده چې لومړی بايد $V(a,0)$، $V'(-a,0)$ راسونه او $W(0,b)$ او $W'(0,-b)$ نقطې وټاکل شي. WW' قطعه خط چې اوږدوالی يې $2b$ دی د هايپربولا د محور مزدوج نومېږي او څلور پاسيني نقطې د مستطيل راسونه دي چې اړونده قطرونه يې د هايپربولا مجانب نومېږي.

مثال: 1 د $9x^2 - 4y^2 = 36$ معادلې ګراف ترلاسه کړئ.

حل. د معادلې دواړه خواوې په 36 تقسيموو او د هايپربولا معادله په لاندې توګه ترلاسه کيږي

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$$

نو $a^2 = 4$ او $b^2 = 9$ ده، يعنې $a = 2$ او $b = 3$. راسونه عبارت دي له $(\pm 2, 0)$ څخه او د مزدوج محور دوه انجامونه عبارت دي له $(0, \pm 3)$ څخه. د مستطيل قطرونه چې د غه څلور نقطې يې څلور انجامونه دي، عبارت له $y = \pm\frac{3}{2}x$ مجانبونو څخه دي، سربيره پر دې $c^2 = a^2 + b^2 = 4 + 9 = 13$ ده، نو د هايپربولا محراقونه $(\pm\sqrt{13}, 0)$ نقطې دي (13.30 شکل).



13.30 شکل

2 **مثال:** د هايپربولا معادله، محراقونه او مجانبونه ترلاسه کړی، داسې چې راسونه يې $(\pm 3\ ,\ 0)$ وي او له $P\ (5,2)$ نقطې څخه تېر شي.

حل. د دې په پام کې نيولو سره چې $a=3$ وي، د هايپربولا معادله عبارت ده له:

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

په باسيني معادله کې د $(x\ ,\ y)=(2\ ,\ 5)$ له تعويض څخه لرو چې:

$$\frac{4}{9}-\frac{25}{b^2}=1$$

له دې ځايه ترلاسه کوو چې $b^2=\frac{9}{4}$ يعنې $b=\frac{3}{2}$ ده؛ په پايله کې

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{\frac{9}{4}}=1$$

وروستۍ معادله هغه غوښتل شوې معادله ده چې، $c^2=a^2+b^2=9+\frac{9}{4}=\frac{45}{4}$ نو $\left(\pm\frac{3}{2}\sqrt{5}\ ,\ 0\right)$ يې اړوند محراقونه دي مجانبونه يې عبارت دي له

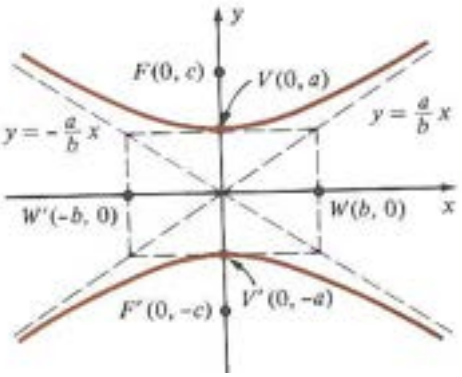
$$y=\pm\frac{b}{a}x\ \Rightarrow y=\pm\frac{3/2}{3}x\ \Rightarrow y=\pm\frac{1}{2}x$$

څخه، يعنې $y=\pm\frac{1}{2}$.

د هايپربولا عمودي حالت: د هايپربولا معادله چې راسونه يې $(\pm a\ ,\ 0)$ او محراقونه يې $(0\ ,\ \pm c)$ دي عبارت ده له:

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$

داسې حال کې چې $c^2 = a^2 + b^2$ ده. دلته $W(b,0)$ او $W'(-b,0)$ د مزدوج محورونو دوه انجامونه دي او مجانبونه يې عبارت دي له $y = \pm \frac{a}{b}$ څخه(13.31 شکل).



13.31 شکل

3 مثال: د $4y^2 - 2x^2 = 1$ معادلې ګراف رسم کړئ.

حل. دغه معادله کولی شو داسې وليکو

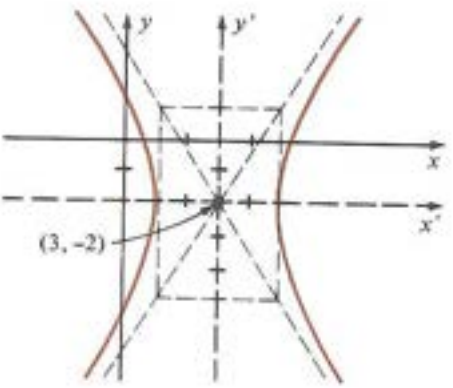
$$\frac{y^2}{\frac{1}{4}} - \frac{x^2}{\frac{1}{2}} = 1$$

نو معادله د هايپربولا اړوند معادله ده:

$$a^2 = \tfrac{1}{4} \Rightarrow a = \tfrac{1}{2} \ , \ a^2 = \tfrac{1}{2} \Rightarrow a = \tfrac{\sqrt{2}}{2}$$

$$c^2 = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{4} \Rightarrow c = \tfrac{\sqrt{3}}{2}$$

نو راسونه $\left(0 \ , \pm \tfrac{1}{2}\right)$ او محراقونه يې $\left(0 \ , \pm \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ دي(13.32 شکل).



13.32 شکل

4 **مثال:** $9x^2-4y^2-54x-16y+29=0$ معادله تشخيص کړئ.

حل. معادله په لاندې توګه ترتيبوو:

$$9x^2-4y^2-54x-16y=-29$$
$$9(x^2-6x)-4(y^2+4y)=-29$$
$$9(x^2-6x+9)-4(y^2+4y+4)=-29+81-16$$
$$9(x-3)^2-4(y+2)^2=36$$
$$\frac{(x-3)^2}{4}-\frac{(y+2)^2}{9}=1$$

چې لاندې شکل لري:

$$\frac{(y')^2}{4}-\frac{(x')^2}{9}=1$$

داسې حال کې چې $x'=x-3$ او $y'=y+2$ ده، د محورونو د لېږد وروسته د هايپربولا مرکز $(13,-2)$ نقطه لاس ته راځي.

د هايپربولا عمومي حالات: د هايپربول معادلې معياري حالت چې مرکز يې $(h\ ,\ k)$ او محراقونه يې د مستقيم خط(x محور)پر مخ پراته وي، عبارت دی له

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1}$$

په همدې توګه د هايپربول معادلې معياري حالت چې مرکز يې $(h\ ,\ k)$ او محراقونه يې د y محور سره موازي په مستقيم خط پراته وي، عبارت دی له:

$$\boxed{\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1}$$

دغه معادلې په معياري حالت کې د هايپربولا له معادلو څخه چې مرکز يې د مختصاتو مبدا وي، د $x'=x+h$ او $y'=y+k$ لېږد وروسته ترلاسه شوې. په دې حالت کې د هايپربولا مجانبونه لاندې شکلونه لري.

$$x-h=\pm\frac{b}{a}(y-k) \qquad \text{و} \qquad y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)$$

د هايپربولا زوج: دوه عمودي او افقي هايپربولا چې لومړی قطر يې $2a$ او د دويم قطر يې $2b$ وي د لاندې معادلو

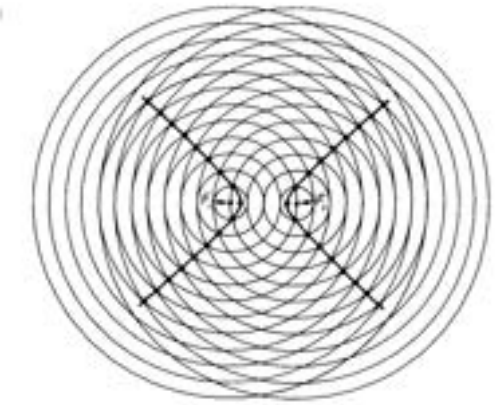
$$\left.\begin{aligned}\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1\\ \frac{(y-k)^2}{b^2}-\frac{(x-h)^2}{a^2}=1\end{aligned}\right\}$$

په درلودو سره د يوه بل مزدوج هايپربولا ګاني نومبړي، ښکاره ده چې د افقي هايپربولا قطر $2a$ او د عمودي هايپربولا قطر $2b$ دی.

د هايپربولا رسمول: د هايپربولا د رسمولو لپاره چې F_1 او F_2 نقطې يې محراقونه او قطر يې $2a$ وي، د دوو دايرو په مرسته چې F_1 او F_2 يې مراکز او r_1 او r_2 يې په ترتيب شعاعوي وي داسې چې:

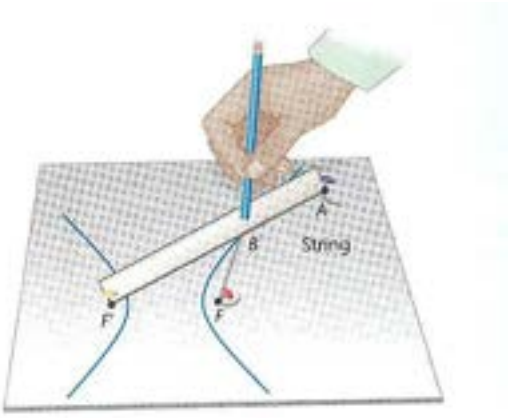
$$|r_1-r_2|=2a$$

د دې دوو دايرو د تقاطع نقطې د يوه هايپربولا پرمخ پرتې دي نو د دې نقطو هندسي ځای ته هايپربولا وايي(13.33 شکل).



13.33 شکل

د هايپربولا عملي رسمول: د يوه تار چې طول يې د خط کش له طول څخه کم دی، يو سر د هايپربولا په محراق کې او دويم سر يې د خط کش په په يوه څنډه کې د شکل سره سم ټينګلوو، د خط کش دويم سر د هايپربولا په دويم محراق واقع کوو. که د پنسل څوکه د تار په اتکا او د خط کش د دوراني حرکت سره په همغږۍ بدلون ومومي، نو کلي محراق لرونکې هايپربولا رسميږي(13.34 شکل).



13.34 شکل

13.5 د مخروطي مقاطع تشخيص

د مخروطي مقاطع د منحني ګانو معادلو ساده حالت په عمومي توګه لاندې شکل لري:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

1. که يا ده معادله د پارابولا مربوط وي، د A او يا C ضريبونو څخه بايد يو صفر وي نه دواړه،
2. که چېرې پاسيني معادله د دايرې لپاره وي اړينه ده څو $A = C \neq 0$ وي.
3. که چېرې معادله بيضوي پورې اړوند وي، A او C هم اشاره دي، يعنې $AC > 0$.
4. که معادله د هايپربولا وي نو بايد، A او C مختلف الاشاره وي، يعنې $AC < 0$.

په هرو پاسينيو څلورو حالتونو کې د منحني ګانو اړوند اړين شرايط وړاندې شوي چې کافي نه دي يوه دويم درجه دوه مجهوله معادله کېدای شي په لاندې توګه نسبتا عمومي حالت ولري:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

په دې معادله کې Bxy حد هم زيات شوی او په مستوي کې د اړوند منحني د دوران په اړه معلومات راکوي چې دلته جزئياتو ته نه ورځو. په هر سر که يا ده معادله مخروطي مقاطع وي، د $\Delta = B^2 - 4AC$ افادې په مرسته، چې د مميزې (*discri min ant*) په نامه يادېږي تشخيص کېږي.

1. که مميزه صفر وي ($\Delta = 0$) منحني يو پارابولا دی.
2. که چېرې مميزه منفي وي ($\Delta < 0$) معادله د بيضوي اړوند ده.
3. که مميزه مثبت شي ($\Delta > 0$) معادله هايپربولا راکوي.

البته دايره د بيضوي ځانګړی حالت دی (که چېرې قطرونه يې سره مساوي وي)

پاس یاد شوې معادله د مخروطي مقاطع سربیره ممکن د یوه مستقیم خط، یو جوړه مستقیم خطونو، یوې نقطې او یا څو مبهم حالاتو ښکارندویي وکړي.

استثنائي حالات: د دې امکان شته چې یوه درجه دویم معادله نه د دایرې، نه د بیضوي، نه د پارابولا او نه د هایپربولا ښکارندویي وکړي.

لومړی. $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=0$ معادله او یا انکشافي حالت یې د بیضوي اړوند نه دی، ځکه چې:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=0 \Rightarrow \begin{cases}(x-h)^2=0 \Rightarrow x=h\\(y-k)^2=0 \Rightarrow y=k\end{cases}$$

لیدل کیږي چې پاسینۍ معادله یوازې (h,k) نقطه څرګندوي او دا نقطه د بیضوي مرکز

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

ده.

دویم. $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=0$ معادله په پام کې نیسو.

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=0 \Rightarrow \left(\frac{x-h}{a}-\frac{y-k}{b}\right)\left(\frac{x-h}{a}+\frac{y-k}{b}\right)=0$$

$$\Rightarrow \frac{x-h}{a^2}-\frac{y-k}{b^2}=0 \quad , \quad \frac{x-h}{a}+\frac{y-k}{b}=0$$

وروستۍ معادلې دوه متقاطع مستقیمونه ښیي چې د لاندې هایپربولا مجانبونه دي:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

دریم. $(y-k)^2=0$ معادله له $y=k$ مستقیم څخه عبارت ده چې د $(y-k)^2=4a(x-h)$ پارابولا د تناظر محور ګڼل کیږي.

1 مثال: $x^2-y^2+2x-8y-15=0$ معادله چې تصور کیږي د هایپربولا اړوند ده تحلیلوو:

$$x^2-y^2+2x-8y-15=0 \Rightarrow (x+1)^2-(y+4)^2=0$$

$$\Rightarrow (x+1)^2=(y+4)^2 \Rightarrow x+1=\pm(y+4) \Rightarrow \begin{cases}x+y=-5\\x-y=3\end{cases}$$

نو راکړل شوې معادله په حقیقت کې د دوو متقاطع مستقیمونو دوې معادلې دي.

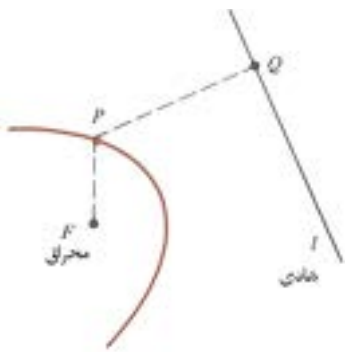
13.6 په قطبي مختصاتو کې د مخروطي مقاطع معادلې

لکه څرنګه چې مخکې وویل شول، مخروطي مقاطع د محراق او یو مستقیم خط(هادي) ترمنځ د واټنونو د نسبت(عن المرکزیت) په توګه پېژندل کیږي. دلته غواړو د عن المزکزیت او هادي مشخصات، یادو منحني ګانو ته مطرح کړو.

قضیه. که چېرې F یوه ثابته نقطه او l په مستوي کې یو ثابتکلی مستقیم خط وي، د ټولو هغو نقطو سیټ چې له F او l څخه یې د واټنونو نسبت؛ یعنې $\frac{d(P,F)}{d(P,Q)} = \varepsilon$ یو ثابت عدد وي، مخروطي مقاطع ګڼل کیږي او F یې اړونده محراق دی. د مخروطي مقاطع معادلې لاندې څلور حالتونه لري:

$$r = \frac{d\,\varepsilon}{1 \pm \varepsilon \cos\theta} \quad , \quad r = \frac{d\,\varepsilon}{1 \pm \varepsilon \sin\theta}$$

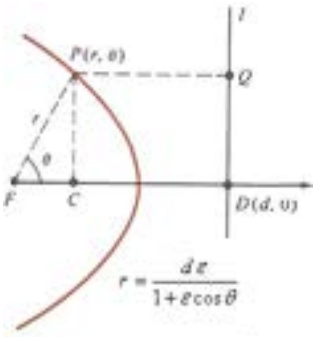
که $\varepsilon = 1$ وي، مقطع پارابولا ده ، که چېرې $0 < \varepsilon < 1$ وي نو بیضوي ده او د $\varepsilon > 1$ لپاره بیا هایپربولا ده. ε ثابت د اړونده مقطع عن المرکزیت او l مستقیم خط یې هادي ګڼل کیږي (13.35 شکل).



13.35 شکل

ثبوت. که $\varepsilon = 1$ وي، ښکاره ده چې $\frac{d(P,F)}{d(P,Q)} = 1$ یعنې $d(P,F) = d(P,Q)$ په دې اساس P نقطه له محراق او هادي څخه متساوي الفاصله ده، نو P د پارابولا یوه نقطه ده.

که چېرې $0 < \varepsilon < 1$ وي F نقطه د قطبي محور په $D(d,0)$ نقطه کې د قطب په توګه او l مستقیم خط یې د عمود په توګه په پام کې نیسو $d > 0$ (13.37 شکل).



13.36 شکل

که $P(r\ ,\ \theta)$ د مستوي يوه نقطه وي داسې چې

$$\frac{d(P\ ,F)}{d(P\ ,Q)}=\varepsilon<1$$

ليدل کيږي چې P د l کيڼ لور ته پرته ده. که C د قطبي محور پرمخ د P مرتسم وي، نو

$$d(P\ ,F)=r\quad ,\quad d(P\ ,Q)=FD-FC=d-r\cos\theta$$

په دې اساس

$$\frac{P(P\ ,F)}{P(P\ ,Q)}=\frac{r}{d-r\cos\theta}\Rightarrow\frac{r}{d-r\cos\theta}=\varepsilon\Rightarrow r=\varepsilon(d-r\cos\theta)$$

$$\Rightarrow r=\varepsilon d-r\varepsilon\cos\theta\Rightarrow r+r\varepsilon\cos\theta=\varepsilon d\Rightarrow r(1+\varepsilon\cos\theta)=\varepsilon d$$

له دې ځايه:

$$r=\frac{d\varepsilon}{1+\varepsilon\cos\theta}$$

ده، چې د ګراف قطبي معادله ګټل کيږي. د $\varepsilon=1$ او $1+\cos\theta=0$ شرط لپاره هيڅ (r,θ) نقطه شتون نلري د $r=d\varepsilon-\varepsilon r\cos\theta$ اړيکې معادل، د قائم مختصاتي سيستم معادله عبارت ده له

$$\pm\sqrt{x^2+y^2}=d\varepsilon-\varepsilon x$$

د دواړو خواوو له مربع کولو څخه لرو چې

$$x^2+y^2=d^2\varepsilon^2-2d\varepsilon^2x+\varepsilon^2x^2$$

له اړين ترتيب وروسته لرو چې:

$$(1-\varepsilon^2)x^2+2d\varepsilon^2x+y^2=d^2\varepsilon^2$$

د مخکيني اړيکې له تکميل مربع او ساده کولو وروسته لرو چې

$$\left(x+\frac{d\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}\right)^2+\frac{y^2}{1-\varepsilon^2}=\frac{d^2\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^2}$$

د پاسيني اړيکې دواړه خواوې په $d^2\varepsilon^2/(1-\varepsilon^2)^2$ تقسيمو.

$$\frac{\left(x+\frac{d\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}\right)^2}{\frac{d^2\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^2}}+\frac{\frac{y^2}{1-\varepsilon^2}}{\frac{d^2\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^2}}=1\Rightarrow\frac{\left(x+\frac{d\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}\right)^2}{\left(\frac{d\varepsilon}{1-\varepsilon^2}\right)^2}+\frac{y^2}{\frac{d^2\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}}=1$$

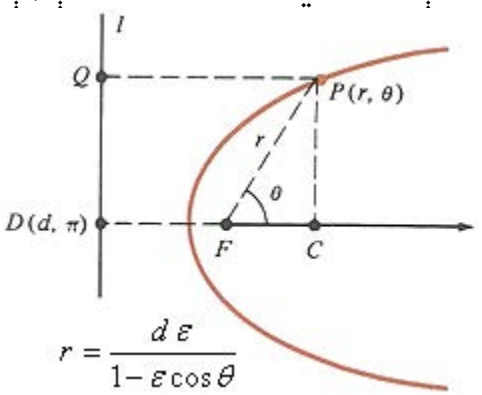
په وروستۍ اړیکه کې د $h=-\frac{d\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}$ ، $a^2=\frac{d^2\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^2}$ او $b^2=\frac{d^2\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}$ له تعویض څخه لرو چې

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

په دې اساس د ترلاسه شوې معادلې ګراف هغه بیضوي ده چې مرکز یې د x محور په $(h\ ,\ 0)$ نقطه کې واقع وي او:

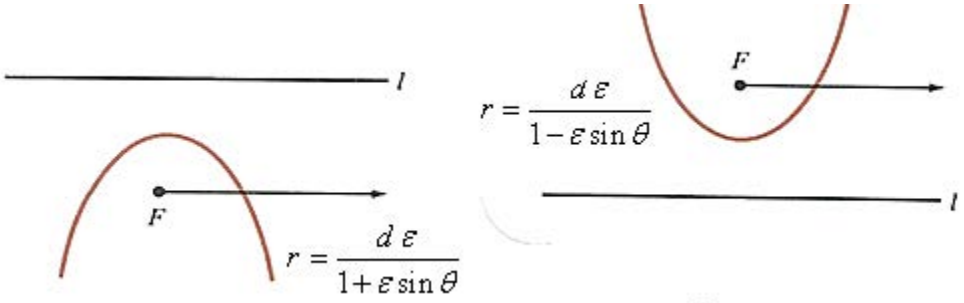
$$c^2=a^2-b^2=\frac{d^2\varepsilon^4}{(1-\varepsilon^2)^2}\Rightarrow c=\frac{d\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}$$

یعنې F محراق $c=d\varepsilon^2/1-e^2$ واټن لري، او د دې ترڅنګ $\varepsilon=c/a$ دی.
که محراق د هادي په نښي لور کې وټاکل شي(13.37 شکل)، داسې چې $d>0$ وي.



13.37 شکل

په دې صورت کې $r=\frac{d\varepsilon}{1-\varepsilon\cos\theta}$ معادله ترلاسه کیږي او په ورته توګه عین پایله ترلاسه کیږي.
ورته ثبوت د $\varepsilon>1$ (هایپربولا) لپاره هم کیږي.
که l هادي د قطبي محور سره موازي وټاکل شي داسې چې له $(d\ ,\ \frac{\pi}{2})$ او یا $(d\ ,\ \frac{3\pi}{2})$ نقطو څخه تېر شوی وي، په مخکینیو معادلو کې د $\cos\theta$ په ځای د $\sin\theta$ تابع ترلاسه کیږي(13.38 شکل) •



13.38 شکل

مثال 1. د لاندې معادلې منحني رسم او تشخیص کړئ.

$$r = \frac{10}{3+2\cos\theta}$$

حل. د کسر صورت او مخرج په 3 تقسیمو او ترلاسه کیږي چې:

$$r = \frac{\frac{10}{3}}{1+\frac{2}{3}\cos\theta}$$

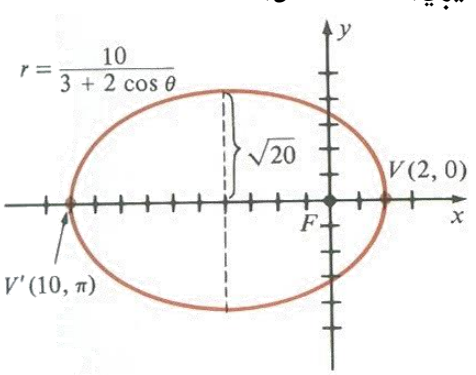
په دې اساس د فورم مطابق $\varepsilon = \frac{2}{3}$ ده. نو ګراف هغه بیضوي دی چې F محراق یې په قطب کې واقع وي او اطول محور یې د قطبي محور په اوږدو پروت وي. د اطول محور دوه انجامونه په $\theta = 0$ او $\theta = \pi$ نقطو واقع دي، یعنې $V\ (2\ ,\ 0)$ او $V'(2\ ,\ \pi)$ نقطې د بیضوي راسونه دي، په دې اساس

$$2a = d\ (V\ ,V') = 12 \Rightarrow a = 6$$

د بیضوي مرکز په VV' د تصنیف نقطه یعنې $(4\ ,\ \pi)$ کې واقع دی او

$$c = a\varepsilon = 6\left(\tfrac{2}{3}\right) = 4 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 36 - 16 = 20$$

یعنې د اقصر محور د طول نیمایي له $\sqrt{20}$ سره مساوي دی. نو په قائم مختصاتي سیستم کې ګراف په لاندې توګه څرګندیږي(13.39 شکل)



13.39 شکل

2 **مثال:** د لاندې معادلې منحني رسم او تشخيص کړئ.

$$r = \frac{10}{2+3\sin\theta}$$

حل. د کسر صورت او مخرج په 2 تقسيموو:

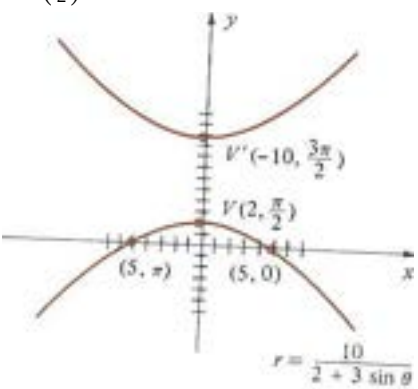
$$r = \frac{5}{1+\frac{3}{2}\cos\theta}$$

په دې اساس د فورمول مطابق $\varepsilon = \frac{3}{2}$ دی. نو ګراف يو هايپربولا دی چې F محراق يې په قطب کې واقع دی. $\sin\theta$ افاده ښيي چې د هايپربولا اصلي محور په قطبي محور عمود دی. د محور دوه انجامونه په $\theta = \frac{\pi}{2}$ او $\theta = \frac{3\pi}{2}$ نقطو واقع دي. يعنې $V\left(2\ ,\ \frac{\pi}{2}\right)$ او $V'\left(-10\ ,\ \frac{3\pi}{2}\right)$ نقطې يې راسونه دي، په دې اساس

$$2a = d\left(V\ ,V'\right) = 8 \Rightarrow a = 4$$

$(5\ ,\pi)$ او $(5\ ,\ 0)$ نقطې د هايپربولا د لاندينې برخې په رسمولو کې مرسته کوي، خو پاسينۍ برخه د تناظر ځانګړتيا له مخې رسميږي.

$$c = a\varepsilon = 4\left(\tfrac{3}{2}\right) = 6 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 = 36 - 16 = 20$$



13.40 **شکل**

3 **مثال:** د لاندې معادلې منحني رسم او تشخيص کړئ.

$$r = \frac{15}{4-4\sin\theta}$$

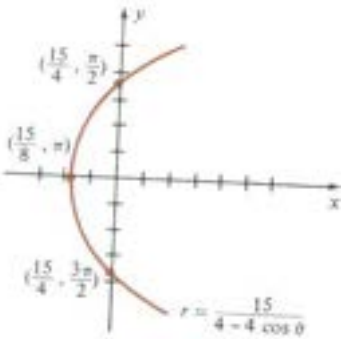
حل. د کسر صورت او مخرج په 4 تقسيموو او ترلاسه کوو چې

$$r = \frac{\frac{15}{4}}{1-\sin\theta}$$

له دې چې $\varepsilon = 1$ دی، نو ګراف يو پارابولا دی چې محراق يې په قطب کې واقع وي د θ څو قيمتونو او د هغې په مرسته د r له موندلو وروسته د دې ګراف نقطې کولی شو وټاکو.

θ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
r	–	$\frac{15}{4}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{15}{4}$

لیدل کیږي چې د $\theta = 0$ لپاره د منحني پرمخ هیڅ نقطه هم واقع نه ده. د دې ټاکل شوو نقطو په مرسته کولی شو د پارابولا ګراف د لاندې شکل په څېر رسم کړو(13.40 شکل).

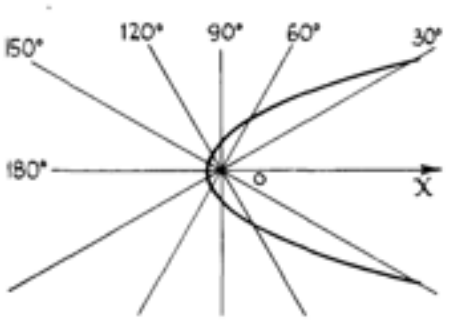


13.40 شکل

4 **مثال:** د $r = \frac{2}{1-\cos\theta}$ معادلې ګراف رسم کړئ.

حل. له دې چې $\cos\theta = \cos(-\theta)$ دی، نو ځکه منحني قطبي محور ته په کتو متناظره(15 شکل)، د $\theta = 0$ لپاره، شعاع($r = \infty$) او د $\theta = 180^\circ$ لپاره د شعاع قیمت $r = 1$ کیږي، نو یاده منحني ترلې نه ده(پارابولا ده)، یوازې څو قیمتونه یې په جدول کې ذکر کوو:

θ	0	60°	120°	180°	240°	300°	360°
r	∞	4	1.3	1	1.3	4	∞



13.41 شکل

13.7 د څېرکي لنډيز

پا رابولا: په يوه مستوي کې د نقطو هندسي سيمې ته چې له يوې ټاکلې نقطې او يوه مستقيم خط څخه متساوي الفاصله وي، د پارابولا ويل کېږي، يادې نقطې ته د محراق او مستقيم خط يې د هادي په نامه يادېږي.

د پارابولا معياري وتر. هغه وتر چې د پارابولا له محورې تېر او په تناظر محور عمودي وي، د پارابولا معياري وتر نومېږي.

د پارابولا حالات

د پارابولا معادله	د پارابولا محراق	د پارابولا هادي	د پارابولا د محور حالات
$(y-k)^2 = 4p(x-h)$	$F(h+p\ ,\ k)$	$x = h-p$	افقي
$(x-h)^2 = 4p(y-k)$	$F(h\ ,k+p)$	$y = k-p$	عمودي

د پارابولا عمومي معادله: $x = Ay^2 + By + C\ ,\ \ y = Ax^2 + Bx + C$

بيضوي: په مستوي کې د نقطو هغه سيټ چې له دوو ټاکلو نقطو څخه د واټنونو مجموع يې له ثابت عدد سره مساوي وي، بيضوي نومېږي، يادې دوې نقطې د بيضوي محراقونو په نامه يادېږي.

د بيضوي معياري وتر. هغه وتر چې د بيضوي له محراقه تېر او په تناظر محور عمود وي، د بيضوي معياري وسعت (*latus rectum*) يا عمودي محراقي وتر نومېږي.

د بيضوي حالات

د بيضوي معياري معادله	د بيضوي محراقونه	د بيضوي محور حالت
$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	$F(h \pm c\ ,\ k)$	افقي
$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$	$F(h\ ,k \pm c)$	عمودي

د بيضوي عمومي معادله. $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0\ ,\ AC > 0\ ,F \neq 0$

د بيضوي مساحت. $A = \pi ab$

هايپربولا: په مستوي کې د نقطو هغه هندسي سيمه چې له دوو ټاکلو نقطو څخه د واټنونو تفاضل يې يو مثبت ثابت عدد وي، د هايپربولا په نامه يادېږي، يادې دوې نقطې د هايپربولا محراقونو په نامه يادېږي.

د هايپربولا معياري وتر. هغه وتر چې د هايپربولا له يوه محراق څخه تېر شوی او په تناظر محور يې عمودي وي، د هايپربولا معياري وسعت (*latus rectum*) يا عمود محراقي وتر نومېږي.

د هايپربولا حالات

د هايپربولا معياري معادله	محراقونه	مجانبونه	محورونه
$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	$F(h\pm c\ ,\ k)$	$x-h=\pm\frac{b}{a}(y-k)$	افقي
$\frac{(y-h)^2}{a^2}-\frac{(x-k)^2}{b^2}=1$	$F(h\ ,k\pm c)$	$y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)$	عمودي

د هايپربولا عمومي معادله: $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0\ ,\ AC<0\ ,F\neq 0$

د هايپربولا زوج. دوه عمودي او افقي هايپربولا چې د لومړي محور طول يې $2a$ او د دويم محور طول يې $2b$ وي او اړونده معادلې يې

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1\ ,\ \frac{(y-k)^2}{b^2}-\frac{(x-h)^2}{a^2}=1$$

وي، د مزدوج هايپربولا ګانو په نامه يادېږي.

د مخروطي مقاطع عمومي معادله: د مخروطي مقاطع منحني ګانو معادلې عبارت دي له

$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

څخه، په عمومي توګه د پاسيني معادلې ګراف پارابولا، بيضوي، هايپربولا، دايره، يوه جوړه خطونه، يو مستقيم خط، يوه نقطه او يا يو مبهم حالت زېږوي.

1. که معادله د پارابولا وي، د A او يا C ضريبونو څخه يو يې صفر وي، نه دواړه يې،
2. که چېرې معادله د يوې دايرې وي نو بايد $A=C\neq 0$ شي.
3. که معادله د بيضوي اړوند وي، A او C بايد هم اشاره وي، يعنې $AC>0$.
4. که معادله د هايپربولا اړوند وي، نو A او C بايد مختلف الاشاره وي، يعنې $AC<0$.
5. که $A=B=0$ وي، معادله د يوه مستقيم خط اړوند ده.

د مخروطي مقاطع کلي معادله: يوه بشپړ دويم درجه دوه مجهوله معادله عبارت ده له

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

په دې صورت کې ممکن منحني په مستوي کې د يوې تاکلې زاويې په اندازه دوران وموميي که معادلـه د مخروطـي مقـاطع اړونـد وي، د $\Delta = B^2 - 4AC$ افـادې پـه مرسـته چـې د ممـيـزې ($discri\min ant$) په نامه يادېږي کېداى شي اړونده منحني تشخيص کړو.

4. که ممیزه صفر وي؛ ($\Delta = 0$) معادله د يو پارابولا ده،

5. که چېرې ميزه منفي وي؛ ($\Delta < 0$) معادله بيضوي راکوي،

6. که چېرې ممیزه مثبت وي؛ ($\Delta > 0$) معادله يوه هايپربولا ښيي.

البته دايره د بيضوي ځانګړې حالت دى(کله چې قطرونه يې سره مساوي شي)

په قطبي مختصاتو کې د مخروطي مقاطع معادلې: $r = \frac{d\,\varepsilon}{1 \pm \varepsilon \cos\theta}$, $r = \frac{d\,\varepsilon}{1 \pm \varepsilon \sin\theta}$

الف. که $\varepsilon = 1$ وي معادله د پارابولا اړوند ده،

ب. د $\varepsilon < 1$ لپاره معادله بيضوي شکل راکوي،

ج. د $\varepsilon > 1$ په صورت کې د معادلې منحني يو هايپربولا دى،

د. که چېرې $\varepsilon = 0$ وي منحني له يوې دايرې څخه عبارت دى.

13.8 تمرين

1. د لاندې مرکزونو او شعاعو په کارولو سره اړونده دايروي معادلې وليکئ.

$I.\ (0,0), r = 5$, $II.\ (3,2), r = 4$, $III.\ (2,-2), r = 2$

2. د لاندې دايرو مراکز او شعاعوې وټاکئ.

$I.\ (x-1)^2 + (y+6)^2 = 36$, $II.\ (x+3)^2 + y^2 = 9$

$III.\ (x+\pi)^2 + (y-2)^2 = 16$, $IV.\ (x-a)^2 + (y-b)^2 = c^2$

3. د لاندې دايرو معادلې په معيارې توګه وليکئ.

$I.\ x^2 + y^2 - 6x - 2y - 6 = 0$, $II.\ x^2 + y^2 + 4x - 5y - 7 = 0$

$I.\ 4x^2 + 4y^2 - 28x + 13 = 0$

4. د لاندې دايرو حقيقي، موهومي او صفري ډولونه تشخيص کړئ.

$I.\ x^2 + y^2 - 2x + 10y + 19 = 0$, $II.\ x^2 + y^2 + 2x - 4y + 6 = 0$

$III. 4x^2 + 4y^2 + 24x - 4y + 1 = 0$, $IV. 3x^2 + 3y^2 - 4x + 2y + 6 = 0$

5. د لاندې پارابولا ګانو اړونده محراق، راس او هادي وټاکئ.

$I.\ y^2 = 6x$, $II.\ x^2 = 8y$,

$III.\ 4y^2 = -3x$, $IV.(y-1)^2 = -8(x-5)$

6. د لاندې پارابولا ګانو معادلې وليکئ.

الف) که محراق يې (6,-2) او هادي يې $x-2=0$ وي.

ب) که چېرې راس يې (1,3) او هادي يې $x+2=0$ وي.

ج) که محراق يې (3,1) او هادی يې $y=0$ وي.

7. لاندې معادلې په اړوند ستندرد حالت واړوئ؛ ورپسې د هر يوې راس او هادي وټاکئ.

$$I.\ \ y^2-2y-8x+25=0\ \ ,\ \ II.\ \ 3y^2-8x+16=0$$

$$III.\ \ 5x^2+2y-12=0\ \ ,\ \ IV.\ \ x^2-4x-2y-8=0$$

8. دلاندې بيضوي ګانو مرکز، محراق، راسونه او محورونه وټاکئ.

$$I.\ \ 9x^2+16y^2=576\ \ ,\ \ II.\ \ 16(x-6)^2+36(y-4)^2=576$$

$$III.\ \ 9x^2+4y^2-18x+16y-11=0\ \ ,$$

$$IV.\ \ 16x^2+4y^2+96x-8y+84=0$$

9. د بيضوي معادله وليکئ چې

الف) مرکز يې (0,0) ، محراق يې (0,-5) او رأس يې (0,13) وي.

ب) محراقونه يې $(0\ ,\ \pm4)$ او راسونه يې $(0\ ,\ \pm5)$ وي.

ج) محراقونه يې $(\pm5,0)$ او عن المرکزيت يې $\frac{5}{8}$ وي.

10. د بيضوي معادله وليکئ چې مرکز يې (1,2)، محراق يې (6,2) وي او له (1,0) نقطې څخه تېره شوې وي.

11. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ منحني رسم کړئ که چېرې $a=b$ وي.

12. د لاندې هايپربولا ګانو محراقونه، راسونه او مجانبونه وټاکئ.

$$I.\ \ x^2-y^2=25\ \ ,\ \ II.\ \ 4x^2-25y^2=100\ \ ,\ \ III.\ \ \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$$

13. د لاندې هايپربولا ګانو مرکز، محراقونه، راسونه او مجانبونه وليکئ.

$$I.\ \ \frac{(x-1)^2}{9}-\frac{(y-2)^2}{16}=1\qquad II.\ \ \frac{(y+1)^2}{4}-\frac{(x-1)^2}{1}=1$$

$$III.\ \ x^2-3y^2-4x+18y-50=0$$

$$IV.\ \ 16x^2-9y^2+90y-81=0$$

14. د هايپربولا معادله تر لاسه کړئ چې مرکز يې (5,-4)، رأس يې (5,2) وي او له (4,8) نقطې څخه تېره شوې وي.

15. لاندې معادلې راکړل شوې؛ ډولونه يې تشخيص کړئ.

$I.\quad 2x^2+5y^2-7x+9y=0$

$II.\quad 3x^2-7y^2-6x+12y-1=0$

$III.\quad -8x^2-8y+4x-5y+7=0$

ضميمه

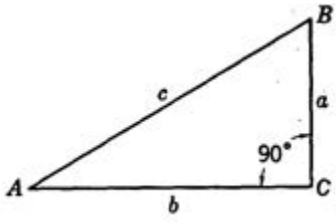
لومړی. د هندسي شمېرنو قواعد

په دې ضميمه کې د ځينو سطحو او هندسي اجسامو شمېرنې په لنډ ډول راوړل شوي دي.

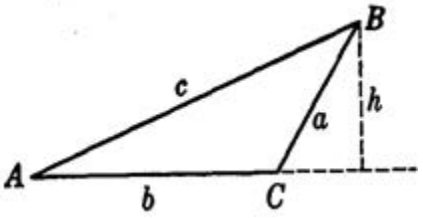
1. اختياري مثلث (هر ډول شکل چې ولري) (1 شکل)

که b قاعده، h ارتفاع، K مساحت، P محيط او $S=\frac{1}{2}(a+b+c)$ وي، نو

$$K=\tfrac{1}{2}hb=\tfrac{1}{2}ab\sin C=\tfrac{1}{2}ac\sin B=\tfrac{1}{2}bc\sin A=\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$$



2 شکل



1 شکل

2. قائم الزاويه مثلث (2 شکل)

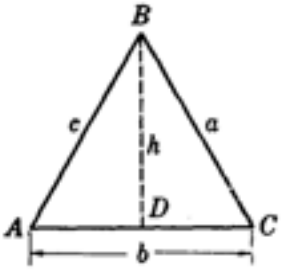
$$K=\frac{1}{2}hb=\frac{1}{2}ab\quad,\quad c^2=a^2+b^2$$

3. متساوي الساقين مثلث (3 شکل)

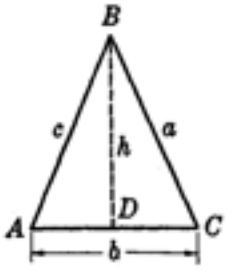
$$a=c\quad,\quad \hat{A}=\hat{C}\quad,\quad c^2=h^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2,\quad h^2=\frac{1}{2}\sqrt{4c^2-b^2}.$$

4. متساوی الاضلاع مثلث (4 شکل)

$$P=3a=3b=3c\,,\ \hat{A}=\hat{B}=\hat{C}=60^\circ\quad,\quad h=\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{2}b=\frac{\sqrt{3}}{2}c$$



4 شکل

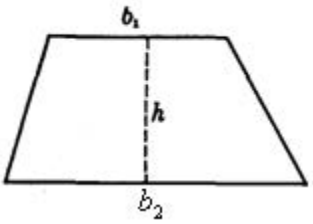


3 شکل

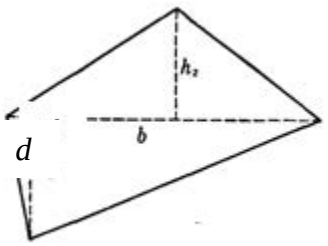
5. منحرف (هغه څلور ضلعي چې دوې ضلعې يې موازي وي (5 شکل))

که d قطر، h_1 او h_2 د قطر دواړو لوريو ته د پرتو مثلثونو ارتفاع وې او K مساحت وي.

$$K = \frac{1}{2} d(h_1 + h_2)$$



6 شکل



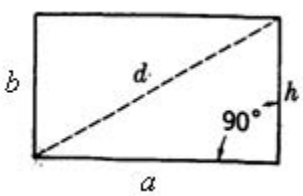
5 شکل

6. ذوذ نقه (هغه څلور ضلعي چې دوې ضلعې يې موازي وي)

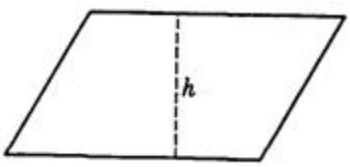
h ارتفاع ، b_2, b_1 موازي اضلاع وې ، K مساحت $K = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)h$

7. متوازي الاضلاع (هغه څلور ضلعي چې مخامخ اضلاع وې يې موازي وي (7 شکل))

K مساحت ، b قاعده و h ارتفاع $K = bh$



شکل8



شکل7

8.مستطيل(8 شکل)

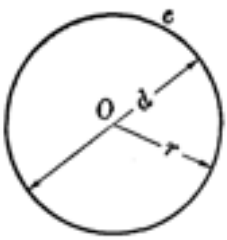
a طول(اوږدوالی) ، bعرض(سور) ، d قطر او P محيط

$$K = ab \quad , \quad d = \sqrt{a^2 + b^2} \quad , \quad P = 2a + 2b$$

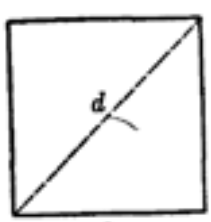
9. مربع (9 شکل)

a ضلع ، d قطر ، p محيط او K مساحت: $p = 4a\ ,\ d = \sqrt{2}a\ ,\ K = a^2$

$$p = 4a \quad , \quad K = a^2 \quad , \quad d = \sqrt{2}d$$



10 شکل



9 شکل

10. دايره (10 شكل)

r شعاع ، d قطر ، c محيط او K مساحت

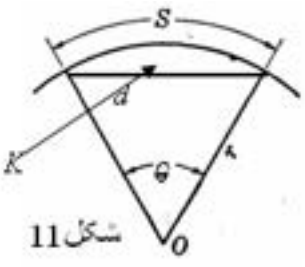
$$\pi = 3{,}1415926545 \approx 3{,}14$$

$$c = 2\pi r = \pi d \quad , \quad K = \pi r^2$$

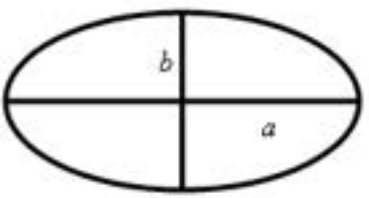
11. د دايرې قطعه او قطاع (11 شكل)

θ مركزي زاويه ، d وتر ، S ،د قوس طول، K د قطعه مساحت او A د قطاع مساحت

$$S = r\theta, A = \frac{1}{2}rS = \frac{1}{2}r^2\theta \quad , \quad K = \frac{1}{2}\left(r^2 - \sin\theta\right)$$



شكل 11



شكل 12

بيضوي (12 شكل)

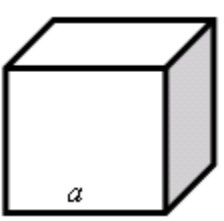
A مساحت ، c محيط ، a د اطول قطر نيمايي ، b د اقصر قطر نيمايي

$$A = \pi\, ab \quad , \quad c = 2\pi\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(a^2 + b^2\right)}$$

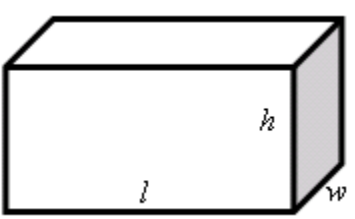
12. مكعب مستطيل (13 شكل)

l طول ، w عرض ، h ضخامت ، A جانبي مساحت او V حجم

$$V = lwh \quad , \quad A = 2(lw + lh + hw)$$



14 شكل



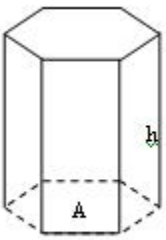
13 شكل

14. مكعب (14 شكل)

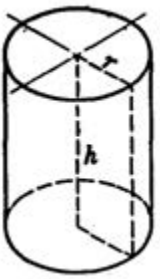
a ضلع ، A جانبي مساحت او V حجم $V = a^3$ ، $A = 6a^2$:

15. قائم منشور (15 شكل)

h ارتفاع ، A د قاعدي سطح او V حجم : $V = Ah$



16 شکل



15 شکل

16. دايروي قائم استوانه(16 شکل)

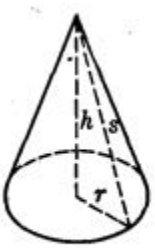
h ارتفاع ، r د قاعدي شعاع ، c د قاعدي محيط، A د قاعدي سطح، S جانبي سطح او V حجم

$$A = \pi r^2 \quad , \quad S = ch = 2\pi rh \quad , \quad V = Ah = \pi r^2 h$$

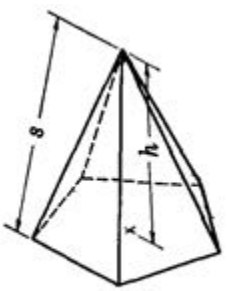
17. هرم(17 شکل)

h ارتفاع ، A د قاعدي سطح ، p د قاعدي د سطحي محيط ، K جانبي محيط ، s وجهي ارتفاع :

$$K = \frac{1}{2}ps \quad , \quad V = \frac{1}{3}Ah$$



شکل 18



شکل 17

18.دايروي قايم مخروط(18 شکل)

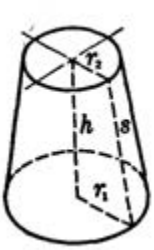
r شعاع ، h ارتفاع ، s وجهي ارتفاع ، A د قاعدي سطح ، S جانبي سطح ، V حجم او c قاعدي محيط :

$$A = \pi r^2 \quad , \quad S = \frac{1}{2}cs = \pi rs \quad , V = \frac{1}{3}Ah = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

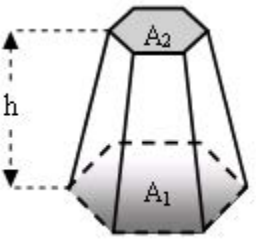
19. قائم ناقص هرم (19 شکل)

h ارتفاع، A ،د لاندينۍ قاعدي مساحت ، A د پاسينۍ قاعدي مساحت ، V حجم

$$V = \frac{h}{3}(A_1 + A_2 + \sqrt{A_1 A_2}).$$



20 شکل



19 شکل

20. دايروي قائم ناقص مخروط(20 شکل)

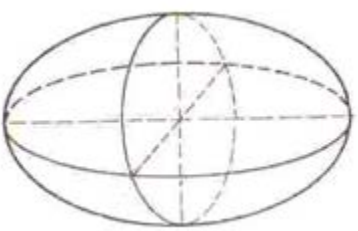
hارتفاع ، A_1 د لاندينۍ مقطع مساحت ، A_2 د پاسينۍ مقطع مساحت ، r_1 د لاندينۍ مقطع شعاع ، r_2 د پاسينۍ مقطع شعاع ، او V حجم :

$$V = \frac{h}{3}(A_1 + A_2 + \sqrt{A_1 A_2}) = \frac{\pi h}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$$

21 . کره

r شعاع ، مساحت (s) ، حجم (v) ، د سترې دايرې مساحت (A) (21 شکل):

$$S = 4h = 4\pi r^2 \quad , \quad V = \frac{4}{3}\pi r^3$$



22 شکل



21 شکل

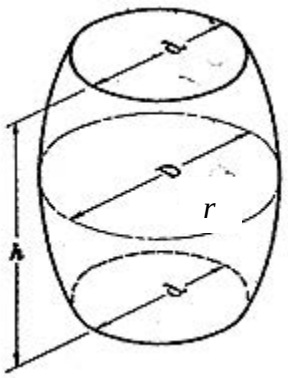
22. اليپسوئيد

د اليپسوئيد درې ګونه قطر (c,b,a) او اړونده حجم يې $V = \frac{4}{3}\pi abc$ دی. په عمومي توګه اليپسوئيد هګۍ ته ورته او يا فشرده خټکي ته ورته شکل دی(22 شکل) ، په خصوصي حالت کې اليپسوئيد د دوو بعدو د مساوي والي په صورت کې د عادي خټکي شکل غوره کوي او که چېرې درې بعدونه يې سره مساوي وي نو په کره اوړي.

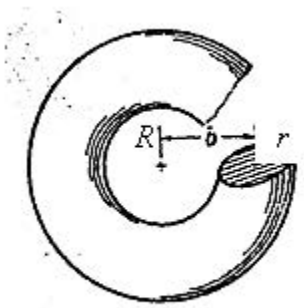
23. **مجسم چنبره**

د r شعاع لرونکي دايرې هندسي سيمه، داسې چې مرکز يې د دويمې دايرې په محيط چې R شعاع ولري؛ تاو شي(دوران ومومي)، مجسم چنبره ترلاسه کيږي(23 شکل)، دويمه دايره د محور دايره نومیږي او r د مقطع او چنبرې شعاع ده. د چنبرې جانبي مساحت S او حجم (V) يې عبارت دی له:

$$S = 4\pi^2 rR \quad , \quad V = 2\pi^2 r^2 R$$



23 شکل



24 شکل

24- بوشکه (ببلر)

د ډول ته ورته شکل حجم چې مقاطع يې نظر يوه ستر مقطع ته متناظر وي او د بوشکې اړوند مقاطع دايروي دي(24 شکل). D ستر قطر، d د پاسيني او لاندينې مقاطعو قطر، A د سترې مقطع مساحت او (B_2, B_1) د پاسيني او لاندينې مقطو مساحت دی، نو حجم يې عبارت دی له:

$$\begin{cases} V = \dfrac{1}{12}\pi\, h(2D^2 + d^2) \\ V = \dfrac{h}{6}(B_1 + B_2 + 4A) \end{cases}$$

د حقيقي اعدادو سيستم

د اعدادو نوم	د اعدادو ډولونه
طبيعي اعداد	$\mathbb{N}=\{1,2,3,4,5,...\}$
کامل اعداد	$\mathbb{N}^*=\{0,1,2,3,4,5,...\}$
تام اعداد	$\mathbb{Z}=\{0,\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm5,...\}$
مثبت تام اعداد	$\mathbb{Z}^+=\{+1,+2,+3,+4,+5,...\}=\mathbb{N}$
منفي تام اعداد	$\mathbb{Z}^-=\{-1,-2,-3,-4,-5,...\}$
ناطق اعداد	$\mathbb{Q}$: لکه $\frac{1}{2}$ ، $\frac{5}{4}$ ، $\frac{7}{1}$ ، $\frac{2}{2}$ او داسې نور
غيرناطق اعداد	$\mathbb{Q}'$: لکه $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{3}$ ، $\sqrt{7}$ ، e ، π او داسې نور
حقيقي اعداد	$\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\overline{\mathbb{Q}}=(-\infty,\infty)$

يوناني الفبا توري

الفا	α	A	نيو	ν	N
بتا	β	B	اکزی	ξ	Z
گاما	γ	Γ	اومیکرون	o	O
د لتا	δ	Δ	پی	π	Π
اپسیلون	ε	E	رو	ρ	P
زتا	ς	Z	سیګما	σ	Σ
اتا	η	H	تاو	τ	T
تتا	θ	Θ	یوپسیلون	ν	Y
آیوتا	i	I	في	$\varphi\phi$	Φ
کاپا	κ	K	کای(خی)	χ	X
لامبدا	λ	Λ	پسی	ψ	Ψ
میو	μ	M	اومګا	ω	Ω

دويم. د مثلثاتي نسبتونو تاريخچه

ساين، کوساين، تنجنت، کوتنجنت، سيکنت او کوسيکنت مثلثاتي نسبتونه په شپاړلسمه پېړۍ کې رايج شول.

د ساين او کوساين اصطلاحاتو ريښې

د لومړي ځل لپاره هندي رياضي پوه آريبهطه (Aryabhata) په شپږمه ميلادي پېړۍ کې اردها-جيا (ardha- jya) اصطلاح چې د وتر نيمايي په معنی ده؛ مطرح کړه او وروسته يې بيا جيوا يا جيا (jya) کليمه چې د وتر معنی لري په ځای وټاکله. عرب مبشتو جيوا کليمه د خپل عربي تلفظ مطابق جيب (jiba) او ځينې مهال جب (jb) تلفظ کوله، چې په عربي قاموسونو کې د ننني فني معني(ساين) نه پرته بله کومه ځانګړې معنی نه لري. ترټولو مشهور اروپايي ژباړن ګراردو کرمونايي (Gherardo of Cremona) چې په 1114 – 1187 کلنو کې يې ژوند کولو او کابو 90 عربي کتابونه يې وژباړل، په 1150 ميلادي کال کې يې جيب عربي کليمه چې غير فني معني يې د خليج، ګودال، ژوروالي او يا جوب وه، په سينوس لاتيني کليمه چې عين معني يې لرله وژباړله، او د سينوس (sinus) کليمې لنډيز ساين (sin) وټاکل شو چې موخه يې هماغه د وتر نيمايي دی، کوساين مفهوم له کوسينوس (cos *inus*) څخه اخيستل شوی چې د سينوس متمم(د ساين متمم) بلل کيږي.

تنجنت او سيکنت مثلثاتي نسبتونه

که يوه زاويه په يوه واحد شعاع لرونکې دايره کې ستندرد حالت ته راوړل شي، ليدل کيږي چې مثلثاتي نسبتونه عبارت له همغو قطعه خطونو څخه دي او ځيني وخت د مثلثاتي خطونو په نامه يادېږي، چې تنجنت (tan *gent*) مماس حالت او سيکنت (sec*ant*) د قاطع حالت لري، يعني تنجنت او سيکنت په ترتيب د مماس او قاطع کليمو معادل دي.

کوتنجنت او کوسيکنت مثلثاتي نسبتونه

کوتنجنت او کوسيکنت اصطلاحات په ترتيب د تانجنت او سيکنت اصطلاحاتو متمم دي.

نو د ساين اصلي معنی وتر خو غير فني معني يې جوب يا جيوال دی. تنجنت د مماس مفهوم لري او سيکنت د قاطع معنی ښيندي. کوساين د ساين، کوتنجنت د تنجنت او کوسيکنت د سيکنت متمم دی.

ساين، کوساين، تنجنت، کوتنجنت، سيکنت او کوسيکنت مثلثاتي نسبتونه د θ زاويې لپاره په لاندې توګه ښودل کيږي.

$$\sin\theta \text{ ، } \cos\theta \text{ ، } \tan\theta \text{ ، } \cot\theta \text{ ، } \sec\theta \text{ و } \cos ec\theta$$

اخځليکونه

1- Ann, X. G. and Howard B. Foundations for Advanced Mathematics, AMSCO School Publications ,Inc. New York, 1993, pp. 243 -331 , 593 – 629.
2- Apostol, T. M. Mathematical Analysis . Addison Vesley Publishing Company, Reading Massachusetts, USA ,1975 , pp350 -520 .
3- Ayres ,F. J.R., Calculus, Schoum Publishing Co. New York, 1964 . pp. 129 - 158 , 162 – 180 . 283 -330 .
4- Ayres ,F. J.R., First Year College Mathematics, Schoum Publishing Co., New York, 1962 , pp. 417 – 427 .
5- Barnett , R.A. , Ziegler M.R. and Byleen K.E. College Algebra , Sixth Edition , Adivision of The McGraw-Hill Companies , Boston ,USA 1999 , pp. 488-540
6- Bermant, A. I. and Aramanovich , Mathematical Analysis, Mir Publishing, Moscow, 1979 , pp. 258 – 343 , 365 – 568 .
7- Burzynski, D. and Sanders G.D. Applied Calculus , PWS Publishing Company , Boston USA,1995. pp. 450-536 .
8- Cohen, D. Precalculus , California ,Los Angeles,1990,pp. 411 -449 .
9- Demidovich, B.; Problems Mathematical Analysis, Mir Pub. Moscow, 1981, pp. 180 – 318 .
10- Demidovich, B.P. and. Maron I.A ., Computational Mathematics .Mir Publishers .Moscow 1981, pp.127 -135 , 229 -269.
11- Edwards, Jr .C.H. and David E.P; Calculus with Analytic Geometry , Prentice hall Englewood Cliffs, New Jersey, 1994, pp. 688 – 954 .
12- Frank A.J.R. Caculus , Schoum Publshing Co.New York 1964 .
13- Gerald, L.B. and Karl J. S.Single Variable Calculus Second Edition ,Prentice Hall, Upper Saddle River , New jersey 1999. pp 958 – 1010.
14- Karl, J.S. Trigonometry For College Students , Brook/Col Publishing Co .Washington ,1998. p. 125 .
15- Kindle , H.J. Analytic Geometry , Schoum Publishing Co., New York , 1964 . pp. 258 – 272 , 278 , 279 , 283 – 330 .
16- Maron , I.A., Problem in Calculus of One Variable ,Mir Pub., Moscow,1988.pp. 65 – 81 .
17- Marvin , L .B. Calculus , Indiana University , Addison-Wesley, USA 1999 , pp. 496 – 509
18- Murry ,R.S.Vector Analysis , , Schoum Publishing Co., New York , 1959 .
19- Payne, M. Ph. P., Pre Calculus, Mathematics, W. B. Saunders Co. Philadelphia, London, Toronto, 1977, p. 87 .
20- Peter, K. Technical Calculus With Analytic Geometry Second Edition Broks-Cole Publishing Company , Pacific Grove, California 1988.pp. 315, 321 , 323 , 363 , 387 -406 .

21- Piskunov , S.M. Diffrential and Integral Calculus, 1 vols. Mir Pub. Moscow, 1981.pp. 158 – 211 , 216 – 247 , 253 – 319 .
22- Piskunov , S.M .,Diffrential and Integral Calculus, 2 vols . Mir Pub. Moscow, 1981.pp. 10 – 191 , 216 – 247 , 253 – 319 .
23- Robert, B. Intermediate Algebra for College Student Second Edition , Prentice Hall , Upper Saddle River, New Jersey 1997.p. 819 , 843 , 858 .
24- Robert, C. Spiegel , W.M. Advanced Calculus, Second Ed. Schaum's Outlines, New York. 2002 , pp. 151 – 177 , 211 , 235,275 , .
25- Spiegel , M.R. Statistics , ,Schaum,s Outline Series , New York ,1961.pp.45 -64 .
26- Thomos ,G.B .and Finny ,R.L. Calculus and Analytic Geometry , Addison – Wessley ,New York , USA,1996, PP.1001 - 1134 .
27- آپوستل ، ت. م. آنالیزریاضی، ترجمه عالم زاده ، ع.ا. موء سسهء انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف، چاپخانه دانشگاه صنعتی شریف. چاپ سوم ، تهران 1372، صفحات 486 – 569.
28- بهبودیان ، ج. آماروا حتمال مقدماتی ، نشردانشگاه امام رضا(ع) ، چاپ انتشارات قدس رضوی ، مشهد 1380صفحات 24 ، 30 -32 ، 49 – 52.
29- پورکاظمی ، م.ح. ریاضیات عمومی ، جلددوم ، چاپ نشرنی ، تهران 1370 ، صفحات 11 – 108 ، 306 – 321 ، 433 – 519.
30- خادم ، ب . و نوروزی ، ز. محاسبات عددی ، موسسه چاپ وانتشارات ، تهران 1380 صفحات 72 – 78.
31- رالف پی، گ. ریاضیات گسسته وترکیباتی ، جلداول ، ترجمه عالم زاده ، ع.ا. چاپ موء سسه نشرعلوم نوین ، تهران 1380 ، صفحه 872.
32- شهریاری، پ. آشنایی با نظریه احتمال ، نشرمهاجر، تهران 1379. صفحات 44 – 75.
33- شوتس، س.ل. ریاضیات گسسته، ترجمه عالم زاده ، ع.ا. انتشارات اسحاق ، چاپ رستمخانی تهران 1378، صفحات 394 – 405.
34- علیخانی ، ع.ا و میرمیرانی ، م. آنالیزریاضی ، انتشارات ارکان ، اصفهان 1380 ، صفحات 208 – 210.
35- ملا فرجزاده ، س. فرهنگ ریاضیات ، چاپ ونشرانتشارات احرار، تبریز 1377. صفحات 255 – 290.
36- مندلسون ، ا. حساب دیفرانسیل وانتیگرال مقدماتی، ترجمه عالمزاده ، ع.ا. انتشارات صالحین ، تهران 1380 ، صفحات 117 – 149.

37- منصورفر، ک. ریاضیات پایه برای علوم اجتماعی، چاپ ونشر سازمان مطالعه وتدوین کتب علوم انسانی (سمت) ، تهران 1378 ، صفحات159 -207.
38- نیکوکار، م. و فرزام، گ. ریاضیات پیش دانشگاهی ، نشر گسترش علوم پایه ، تهران 1381 ، صفحات 227 – 247.
39- هارورد و ایوز، تاریخ ریاضیات جلد اول ، ترجمه محمدقاسم وحیدی اصل ، چاپ ،مرکزدانشگاهی ، ایران ، تهران ، 1381 ، صفحات266 – 275.
40- هارورد و ایوز، تاریخ ریاضیات جلد دوم، ترجمه محمدقاسم وحیدی اصل ، چاپ ،مرکزدانشگاهی ، ایران ، تهران ، 1381 ، صفحات 4- 6 ، 99 – 106.